

А. Исаков

Физика

ЕГЭ - 2015

Решение задач
повышенной сложности

Камчатский государственный технический университет

А. Исаков

Физика
ЕГЭ – 2015
Решение задач повышенной сложности
Часть 1

Петропавловск-Камчатский
2015

УДК 50(075.8)
ББК 20я73
И85

Рецензент
доктор физико-математических наук,
профессор Дальневосточного Федерального университета
Стоценко Л.Г.

Исаков Александр Яковлевич

И85 Физика. ЕГЭ – 2015. Решение задач повышенной сложности. Часть 1:
КамчатГТУ, 2015. – 147 с.

Приведены решения тематических тестовых заданий, составленных Ханнановым Н.К. и заданий, рекомендованных администраторами ЕГЭ в качестве тренировочных перед экзаменом 2015 г. По мнению составителей, задания соответствуют в полной мере объёму и тематике ЕГЭ по физике в 2015 г., отражая все внесённые идеологами ЕГЭ актуальные изменения в сравнении с предыдущими годами.

Большинство задач снабжено подробными решениями с анализом применяемых законов и определений. В некоторых случаях приведены дополнительные теоретические сведения, необходимые для осмысления хода решений.

Сборник предназначен, прежде всего, для школьников старших классов, намеревающихся овладеть методиками решения задач повышенной сложности в рамках современного ЕГЭ.

Приведенные материалы могут быть так же полезными студентам первых курсов, изучающих общую физику в университетском объёме по техническим программам подготовки, особенно студентам заочной формы образования, когда программа осваивается самостоятельно.

Оглавление

Задания из сборника Ханнанова Н.К.

Механика	5
Молекулярная физика. Термодинамика	29
Электродинамика	39
Оптика	59
Квантовая физика	64

Тренировочные задания 2015 г.

Механика	71
Молекулярная физика. Термодинамика	90
Электродинамика	107
Квантовая физика	137

Задания из сборника Ханнанова Н.К.

Механика

1. Мимо остановки по прямой улице проезжает грузовик со скоростью 10 м/с. Через 5 с от остановки вдогонку грузовику отъезжает мотоциклист, движущийся с ускорением 3 м/с². На каком расстоянии от остановки мотоциклист догонит грузовик?

Решение

1. Кинематические уравнения движения автомобиля и мотоцикла, с учётом того, автомобиль движется равномерно, а мотоцикл равноускоренно и до встречи они делают одинаковое перемещение от остановки:

$$\left. \begin{aligned} x &= v(t + \tau); \\ x &= \frac{at^2}{2}; \end{aligned} \right\}$$

где $v = 10$ м/с – скорость автомобиля, $\tau = 5$ с промежуток времени между стартом автомобиля и мотоцикла, a – ускорение мотоцикла, t – текущее время.

2. Система уравнений содержит две неизвестных величины t и x , из первого уравнения выразим время t и подставим это значение во второе уравнение:

$$t = \frac{x - v\tau}{v}; \Rightarrow x = \frac{a}{2} \left(\frac{x^2 - 2xv\tau + v^2\tau^2}{v^2} \right);$$

или:

$$\frac{2xv^2}{a} = x^2 - 2xv\tau + v^2\tau^2; \Rightarrow x^2 - x \left(2v\tau + \frac{2v^2}{a} \right) + v^2\tau^2 = 0;$$

3. Подставляя числовые значения заданных по условию задачи величин, придём к квадратному уравнению:

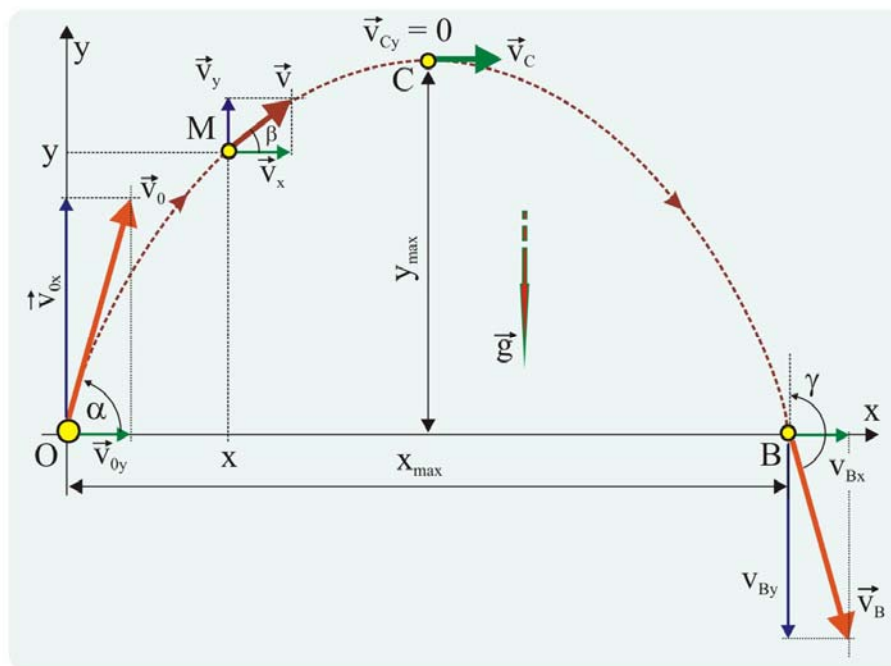
$$x^2 - 166,7x + 2500 = 0; \Rightarrow x = 83,35 \pm \sqrt{6947,2 - 2500} \approx 150 \text{ м};$$

2. Небольшой камень, брошенный с ровной горизонтальной поверхности земли под углом к горизонту, упал обратно на землю через 2 с в 20 м от места броска. Чему равна минимальная скорость камня за время полёта?

Решение

1. Кинематические уравнения движения тела, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha; & (1) \\ v_y &= v_0 \sin \alpha - gt; & (2) \\ x &= v_0 t \cos \alpha; & (3) \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}; & (4) \end{aligned} \right\}$$



Тело, брошенное под углом α к горизонту

2. Как видно из приведенного выше рисунка, минимальной будет скорость в точке С, при этом время подъёма с эту точку будет равно половине времени полного полёта. За это время тело по горизонтальной оси пролетит половину расстояния, соответствующего дальности полёта. Эти обстоятельства математически можно выразить следующей системой уравнений (1), (3):

$$\left. \begin{aligned} v_{\min} &= v_0 \cos \alpha; \\ \frac{x_{\max}}{2} &= v_0 \frac{\tau_{\pi}}{2} \cos \alpha; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_{\min}}{x_{\max}} = \frac{1}{\tau_{\pi}}; \quad v_{\min} = \frac{x_{\max}}{\tau_{\pi}} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

3. Тело, свободно падающее с некоторой высоты без начальной скорости, за время $\tau = 1$ с после начала движения проходит путь в $n = 5$ раз меньший, чем за такой же промежуток времени в конце движения. Найдите полное время движения.

Решение

1. В первую секунду движения тело проходит расстояние:

$$y_1 = \frac{gt_1^2}{2} = 5\text{м};$$

2. В последнюю секунду движения тело пролетает в пять раз большее расстояние:

$$y_2 = 5y_1 = 25\text{м};$$

3. Система уравнений движения тела в последнюю секунду:

$$\left. \begin{aligned} v_{2(0)} &= g(t-1); \\ y_2 &= v_{2(0)}(t-1) + \frac{g(t-1)^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_2 = g(t-1)^2 - \frac{g(t-1)^2}{2} = \frac{g(t-1)^2}{2};$$

$$\frac{2y_2}{g} = t^2 - 2t + 1; \quad t^2 - 2t + 1 - \frac{2y_2}{g} = 0; \quad t^2 - 2t - 4 = 0; \quad t = 1 \pm \sqrt{1+4} \approx 3 \text{ с};$$

4. Небольшой камень бросили с ровной горизонтальной поверхности земли под углом к горизонту. На какую максимальную высоту поднялся камень, если ровно через 1 с после броска его скорость была направлена горизонтально?

Решение

1. Через время $\tau = 1 \text{ с}$ камень находился на максимальной высоте, потому что именно в верхней точке траектории C (см. рис. к задаче №2).

2. Вертикальное перемещение камня без учёта сопротивления происходит с постоянным ускорением g , а время подъёма в верхнюю точку траектории эквивалентно времени падения камня с такой же высоты вертикально вниз:

$$h = \frac{g\tau^2}{2} \approx 5 \text{ м};$$

5. Небольшой камень, брошенный с ровной горизонтальной поверхности земли под углом к горизонту, упал обратно на землю в 20 м от места броска. Сколько времени прошло от броска до того момента, когда его скорость была направлена горизонтально и равна 10 м/с?

Решение

1. Горизонтально скорость камня направлена в верхней точке его траектории (см. рис. к задаче №2). В точку C камень поднимается за время, равное половине времени всего полёта.

2. Система уравнений, описывающая горизонтальное перемещение камня позволяет определить время полёта камня до земли, с учётом того, что проекция скорости камня на горизонтальную ось остаётся постоянной во всё время полёта:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \\ x_{\max} &= v_0 \cos \alpha \tau; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau = \frac{x_{\max}}{v_0 \cos \alpha};$$

3. Время подъёма в верхнюю точку траектории C :

$$t_c = \frac{x_{\max}}{2v_0 \cos \alpha} = 1 \text{ с};$$

6. Маленький шарик падает сверху на наклонную плоскость и упруго отражается от неё. Угол наклона плоскости к горизонту равен 30° . На какое расстояние по горизонтали перемещается шарик между первым и вторым ударами о плоскость? Скорость шарика в момент первого удара направлена вертикально вниз и равна 1 м/с.

Решение

1. Направим вертикальную ось перпендикулярно поверхности плоскости, а горизонтальную координатную ось параллельно плоскости, в этом случае вектор начальной скорости отскочившего шарика будет составлять с выбранной горизонтальной осью угол $\beta = 2\alpha = 60^\circ$.

2. Система уравнений, описывающая полёт шарика при отскоке:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \beta; & (1) \\ v_y &= v_0 \sin \beta - at; & (2) \\ x &= v_0 t \cos \beta; & (3) \\ y &= v_0 t \sin \beta - \frac{at^2}{2}; & (4) \end{aligned} \right\}$$

где $a = g \sin \alpha$

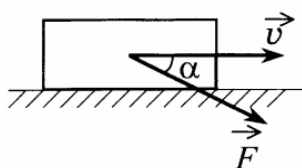
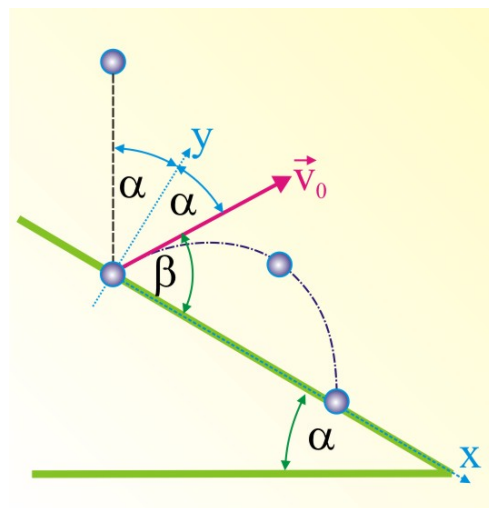
3. Для определения времени полёта шарика воспользуемся тем обстоятельством, что в верхней точке траектории вектор скорости будет направлен параллельно наклонной плоскости, а вертикальная составляющая скорости будет равна нулю:

$$v_{y(C)} = 0; \quad v_0 \sin \beta - at_c = 0;$$

$$t_c = \frac{v_0 \sin \beta}{g}; \quad \tau = 2t_c = \frac{2v_0 \sin \beta}{g \sin \alpha};$$

4. Расстояние, проделанное шариком по горизонтали:

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g \sin \alpha} \approx \frac{1 \cdot 0,87}{5} \approx 0,173 \text{ м};$$

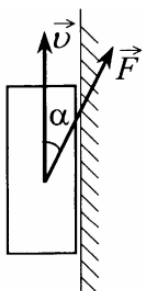


7. Тело массой 1 кг движется по горизонтальной плоскости. На тело действует сила $F = 10 \text{ Н}$ под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и плоскостью равен 0,4. Каков модуль силы трения, действующей на тело?

Решение

1. Сила трения определится как:

$$|\vec{F}_t| = \mu N; \quad |\vec{N}| = mg + F \sin \alpha; \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}_t| = \mu(mg + F \sin 30^\circ) = 0,4(10 + 10 \cdot 0,5) = 6 \text{ Н};$$



8. Брусок массой m прижат к вертикальной стене силой F , направленной под углом α к вертикали (см. рисунок). Коэффициент трения между бруском и стеной равен μ . При какой величине силы F брусок будет двигаться по стене вертикально вверх с постоянной скоростью?

Решение

1. Нормальную реакцию связи обеспечивает горизонтальная проекция силы $\vec{F}$

$$|\vec{N}| = F \sin \alpha;$$

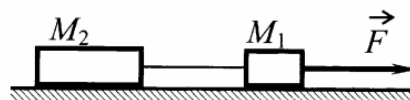
2. Сила трения при движении бруска вертикально вверх с постоянной скоростью будет направлена вертикально вниз:

$$|\vec{F}_t| = \mu F \sin \alpha;$$

3. Уравнение второго закона Ньютона на направление движения бруска при условии постоянства его скорости:

$$F \cos \alpha - mg - \mu F \sin \alpha = 0; \quad F = \frac{mg}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha};$$

9. Два груза, связанные нерастяжимой и невесомой нитью, движутся по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы $\vec{F}$, приложенной к грузу массой $M_1 = 1$ кг (см. рисунок). Минимальная сила F , при которой нить обрывается, равна 12 Н. Известно, что нить может выдержать нагрузку не более 8 Н. Чему равна масса второго груза?



Решение

1. Нить обрывается при $F_{\min} = 12$ Н, при этом значении силы грузы ещё движутся как единое целое с одинаковым ускорением:

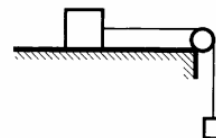
$$(M_1 + M_2)a = F_{\min}; \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_{\min}}{M_1 + M_2};$$

2. Для левого груза справедливо уравнение второго закона Ньютона, представленное в следующем виде:

$$F_{\min} - F_1 = M_1 a; \quad F_1 = 8 \text{ Н}; \quad F_{\min} - F_1 = \frac{M_1 F_{\min}}{M_1 + M_2};$$

$$4 = \frac{12 M_1}{M_1 + M_2}; \quad \Rightarrow \quad M_1 + M_2 = 3 M_1; \quad M_2 = 2 M_1 = 2 \text{ кг};$$

10. По горизонтальному столу из состояния покоя движется брусок массой 0,7 кг, соединенный с грузом массой 0,3 кг невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через гладкий невесомый блок (см. рисунок). Коэффициент трения бруска о поверхность стола равен 0,2. Чему равно ускорение бруска?

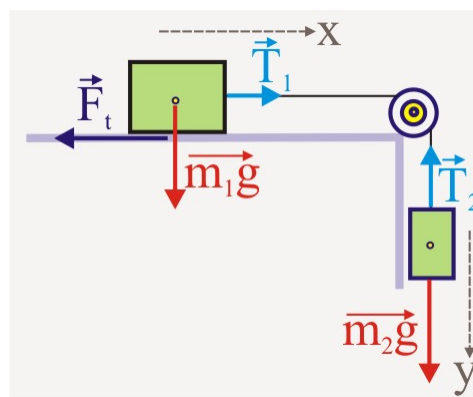


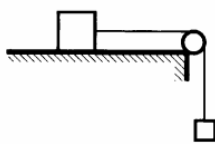
Решение

1. Составим уравнения второго закона Ньютона в проекции на выбранные оси для каждого тела отдельно:

$$\left. \begin{aligned} T_1 - \mu m_1 g &= m_1 a; \\ m_2 g - T_2 &= m_2 a; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} T_1 &= T_2 = m_1 a + \mu m_1 g; \\ m_2 g - (m_1 a + \mu m_1 g) &= m_2 a; \end{aligned} \right\}$$

$$a = \frac{g(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2} \approx \frac{10(0,3 - 0,2 \cdot 0,7)}{0,3 + 0,7} \approx 1,6 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$





11. По горизонтальному столу из состояния покоя движется брусок массой 0,9 кг, соединённый с грузом массой 0,3 кг невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через гладкий невесомый блок (см. рисунок). Коэффициент трения бруска о поверхность стола равен 0,2. Чему равно натяжение вертикальной части нити?

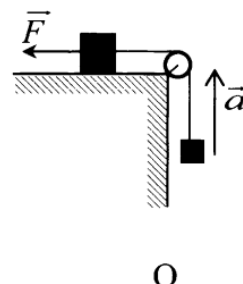
Решение

1. Используя уравнения и рисунок предыдущей задачи, определим натяжение нити:

$$a = \frac{g(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2} = \frac{10(0,3 - 0,2 \cdot 0,9)}{1,2} = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$T_2 = T_1 = m_2(g - a) = 2,7 \text{ Н};$$

12. Груз, лежащий на столе, связан легкой нерастяжимой нитью, переброшенной через идеальный блок, с грузом массой 0,25 кг. На первый груз действует горизонтальная постоянная сила F , равная 9 Н (см. рисунок). Второй груз начал двигаться с ускорением 2 м/с^2 , направленным вверх. Трением между грузом и поверхностью стола пренебречь. Какова масса первого груза?

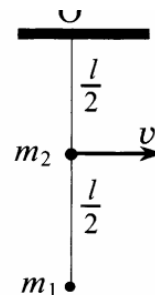


Решение

1. Уравнение второго закона Ньютона для груза на столе и подвешенного тела направление движения:

$$\left. \begin{aligned} F - T &= m_1 a; \\ T - m_2 g &= m_2 a; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{F - T}{a} = \frac{9 - 3}{2} = 3 \text{ кг}; \\ T_1 = T_2 &= m_2(g + a) = 3 \text{ Н}; \end{aligned} \right\}$$

13. Грузики с точечными массами $m_1 = 0,25 \text{ кг}$ и $m_2 = 0,5 \text{ кг}$ прикреплены к невесомому стержню длиной $l = 1 \text{ м}$ (см. рисунок). Стержень может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку О. Грузик m_2 в нижней точке траектории имеет скорость $v = 2 \text{ м/с}$. Определите силу, с которой стержень действует на грузик m_1 в этот момент времени.

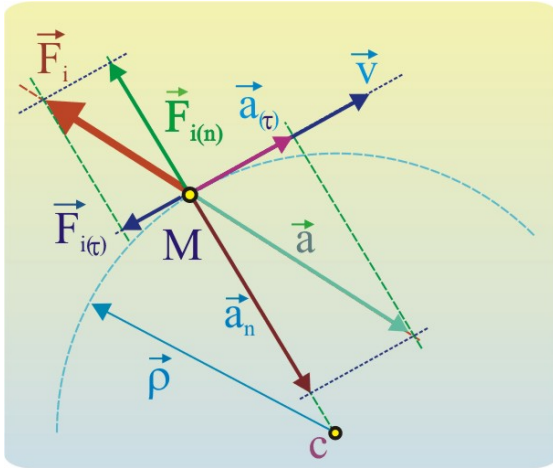


Решение

1. Решение задачи возможно провести с использованием принципа Д Аламбера, который ввёл в рассмотрение фиктивные силы инерции. Сила $\vec{F}_i$, равная по модулю произведению массы материальной точки на её ускорение и направленная в сторону противоположную ускорению, называется силой инерции точки.

2. Соотношение $\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_i = 0$, является математическим выражением принципа Даламбера для несвободной материальной точки ($\vec{F}$ – результирующая обычных ньютоновских сил, $\vec{N}$ – суммарная реакций связи).

Во всякий момент движения материальной точки, приложенные к ней активная сила и сила реакции связи, как бы уравниваются условно приложенной к этой точке её силой инерции. Реально никакого уравнивания не наблюдается, т.к. в ньютоновском понимании сил на точку действуют только две силы, активная сила $\vec{F}$ и реакция связи $\vec{N}$, поэтому условие равновесия, получаемое в результате описанного действия, является воображаемым. Принцип Даламбера является собой весьма удобный приём при решении первой задачи динамики, когда по заданным уравнениям движения и массе необходимо находить систему действующих сил. Принцип Даламбера позволяет упростить процесс составления уравнений движения точки.



Сила инерции при вращении

3. Если точка движется по криволинейной траектории, то силу инерции по аналогии с ускорением удобно представлять в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих: касательную (тангенциальную) силу инерции

$$\vec{F}_{i(\tau)} = -m\vec{a}_{\tau},$$

направленную противоположно тангенциальной составляющей ускорения и нормальную (центростремительную) силу инерции

$$\vec{F}_{i(n)} = -m\vec{a}_n,$$

вектор которой противоположен по направлению вектору нормального (центростремительного) ускорения. Уравнениям можно придать иной вид

$$|\vec{F}_{i(\tau)}| = m \left| \frac{d\vec{v}_{\tau}}{dt} \right|; \quad |\vec{F}_{i(n)}| = \frac{mv_{\tau}^2}{\rho},$$

где ρ – радиус кривизны траектории.

4. При решении практических задач силы инерции удобно представлять в виде проекций на оси координат

$$\begin{cases} F_{ix} = -ma_x = -m \frac{d^2x}{dt^2}; \\ F_{iy} = -ma_y = -m \frac{d^2y}{dt^2}; \\ F_{iz} = -ma_z = -m \frac{d^2z}{dt^2}. \end{cases}$$

5. Понятие сил инерции появилось в механике не вдруг и не сразу. Дискуссии о них до настоящего времени ведутся в среде специалистов. Слово инерция в переводе с латинского буквально обозначает «покой» или «бездействие». Все заморочки, возникающие с понятием инертности связаны с тем, что не всё понятно с массой, которая, как известно, является мерой инертности. Природа массы к настоящему времени тоже, кстати, не вполне ясна. Принято считать, и не более того, что масса элементарной частицы на качественном уровне определяется комплексом физических полей. О силах инерции начали рассуждать в Древней Греции. Именно там впервые появился термин «механе», который обозначал подъёмную машину в театре, предназначенную для транспортировки на сцену актёров, играющих роли древнегреческих богов. В работах Аристотеля можно усмотреть первые элементы динамики, хотя само понятие движения было расплывчатым. Направление движения, как правило, не

рассматривалось, акцент делался на анализ начального и конечного положения движущихся объектов. Так, например, Аристотель полагал, что движение, это изменение места. Эта сентенция натурфилософа приводила к некоторой двусмысленности. Следует ли вращение по круговой траектории считать движением, ведь, по сути, место то не меняется? Конечную и начальную точку в этом случае, не рассматривая направления движения задать затруднительно.

6. Аристотель, все движения делил на естественные и насильственные. Естественные движения, по его мнению, протекали сами собой, без воздействия сторонних сил. Насильственные движения непременно протекали в присутствии «двигателя», который, собственно, и инициировал само движение. Двигатель Аристотель располагал либо в самом исследуемом теле либо в непосредственном контакте с ним. В современном представлении естественное движение может быть истолковано, как движение по инерции. Но Древние Греки были иного мнения. Естественное движение происходило исключительно для того, чтобы тяжёлые тела занимали свои естественные места, например, на поверхности Земли. Лёгкие тела, типа огня, стремились занять своё естественное положение, как можно дальше от поверхности земли в небесах. При этом естественные движения тяжёлых тел полагались прямолинейными, имеющими начальное положение и конечное, а для небес отводилось более совершенное круговое движение. Кстати по началу даже Галилей, открывший закон инерции считал, что движение по инерции непременно должно быть круговым. Открытый закон инерции Галилей воспринимал, прежде всего, в виде его приложения к движению небесных тел, хотя позже, после открытия Ньютоном закона гравитации, оказалось, что небесные тела движутся по замкнутым траекториям вследствие действия на них гравитационных сил.

7. Впервые близкое к современным понятиям определение было сделано Ньютоном, которое в переводе с латыни А.Н. Крылова звучит следующим образом: *«Врождённая сила материи, есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено само себе, удерживает своё состояние покоя или равномерного прямолинейного движения»*.

8. Следует иметь в виду, что бытовое употребление термина «движется по инерции» не всегда точно отражает суть происходящего. Говоря, например, о движении автомобиля с выключенным сцеплением или о качении бильярдного шара по поверхности игрового стола, нельзя считать движение инерциальным, т.к. в обоих случаях на движущиеся объекты всё-таки действуют силы трения и сопротивления.

9. Проявление сил инерции существенно отлично от проявления сил в их обычном понимании, поэтому на протяжении длительного времени даже в специальной литературе при употреблении определения «сила инерции» происходила путаница. Ясность внёс Д Аламбер, в своем трактате, названном в духе того времени исчерпывающе «Динамика: Трактат в котором законы равновесия и движения тел сводятся к возможно меньшему числу и доказываются новым способом и в котором излагается общее правило для нахождения движения нескольких тел, действующих друг на друга произвольным образом». В трактате был специальный раздел, посвящённый силам инерции «О силе инерции и вытекающих из неё свойствах движения». Д Аламбер утверждал, совершенно справедливо, что тело приведенное в движение произвольной причиной, непременно должно двигаться равномерно и прямолинейно, пока следующая причина не выведет его из такового состояния.

10. Французский математик и механик Лагранж (1736 – 1813) в классическом произведении «Аналитическая механика» сформулировал общий принцип подхода к анализу движения механических систем, взяв за основу принцип Д Аламбера. Суть принципа такова: «При движении системы с идеальными связями (т.е. такими, реак-

ции которых не могут произвести работы, – без трения, без потерь энергии в этих связях) а каждый момент времени сумма элементарных работ всех активных сил (т.е. не реакций связи) и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю». Силы инерции и производимую ими работу Лагранж считал фиктивными, вводимыми исключительно из удобства анализа. Силу инерции Лагранж считал свойством тел. Принцип Лагранжа в своё время подвергся критике философов. Лагранж, по их мнению, предлагал решать задачи динамики методами статики, которая сама является частным случаем динамики, вот такое философическое несоответствие.

11. Несмотря на ясность общих теоретических принципов, дискуссия о силах инерции продолжается. В основном консенсуса, выражаясь в политических терминах, не находят теоретики и инженеры. При инженерных расчетах машин и механизмов конструкторы считают силы инерции реальными силами и учитывают их наряду с прочими при определении прочностных характеристик. И что характерно, хорошо всё получается.

12. Стержень в данной задаче совершает вращательное движение вокруг оси, проходящей через точку его подвеса перпендикулярно плоскости чертежа, возникновение нормального (центростремительного) ускорения гарантировано. При использовании принципа Д Аламбера стержень можно рассматривать как условно неподвижным. Угловая скорость стержня ω , величина которой в соответствии с теоремой Эйлера для всех точек одинакова, в отличии от линейных скоростей, определится как:

$$\omega = \frac{2v}{\ell} = 4 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \equiv 4\text{с}^{-1};$$

13. Массы m_1 и m_2 представляют собой систему, положение центра масс которой определится уравнением:

$$r_C = \frac{\sum_{i=1}^{i=2} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{i=2} m_i} = \frac{m_1 \frac{\ell}{2} + m_2 \ell}{m_1 + m_2} \approx 0,67\text{м};$$

14. Линейная скорость центра масс:

$$v_C = \omega r_C \approx 2,68 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

15. Воздействие стержня на нижнюю массу m_1 обусловлено появлением при вращении нормального (центростремительного) ускорения, которое возможно определить, рассматривая фиктивную силу энергии F_i :

$$F_i \equiv T = \frac{m_1 v_C^2}{r_C} = \frac{0,25 \cdot 7,2}{2,68} \approx 2,68 \text{ Н};$$

14. Автомобиль совершает поворот на горизонтальной дороге по дуге окружности радиуса 81 м. Какова максимальная скорость автомобиля при коэффициенте трения автомобильных шин о дорогу 0,4?

Решение

1. В соответствии с принципом Д Аламбера автомобиль должен находиться в состоянии условного равновесия при равенстве действия силы трения и силы инерции:

$$\mu mg = \frac{mv_{\max}^2}{R}; \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\mu g R} = 18 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

15. Масса Марса составляет 0,1 от массы Земли, диаметр Марса вдвое меньше, чем диаметр Земли. Каково отношение периодов обращения искусственных спутников Марса и Земли $\frac{T_M}{T_Z}$, двигающихся по круговым орбитам на небольшой высоте?

Решение

1. Условие нахождения спутника на околопланетной орбите:

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{mM}{R^2}, \quad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad \omega R = \sqrt{\frac{GM}{R}}; \quad T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R^3}{GM}};$$

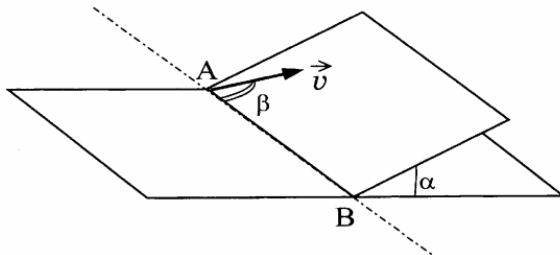
где m – масса спутника, v – линейная орбитальная скорость спутника, G – гравитационная постоянная, M – масса планеты, ω – угловая скорость спутника, T – период обращения спутника.

2. На основании уравнения периода обращения искомое соотношение определится как:

$$\left. \begin{aligned} T_Z &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R^3}{GM}}; \\ T_M &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R^3}{8G \cdot 0,1R}}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{T_Z}{T_M} = \sqrt{\frac{1}{0,8}} \approx 1,11;$$

16. Наклонная плоскость пересекается с горизонтальной плоскостью по прямой АВ. Угол между плоскостями $\alpha = 30^\circ$. Маленькая шайба начинает движение вверх по наклонной плоскости из точки А с начальной скоростью $v_0 = 2$ м/с под углом $\beta = 60^\circ$ к прямой АВ. В ходе движения шайба съезжает на прямую АВ в точке В. Пренебрегая трением между шайбой и наклонной плоскостью, найдите расстояние АВ.

Решение

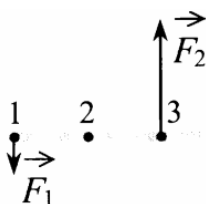


1. При движении шайбы по параболической траектории по наклонной плоскости, ускорение свободного падения g будет проявляться в виде проекции на ось перпендикулярную поверхности плоскости:

$$a_g = g \sin \alpha;$$

2. Расстояние АВ в этом случае определится из условия:

$$x_{\max} = AB = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g \sin \alpha} = \frac{4 \cdot 0,87}{5} \approx 0,69 \text{ м} \approx \frac{2\sqrt{3}}{5} \text{ м};$$



17. На рисунке изображен тонкий невесомый стержень, к которому приложены силы $F_1 = 100$ Н и $F_2 = 300$ Н. Через какую точку должна проходить ось вращения, чтобы стержень находился в равновесии?

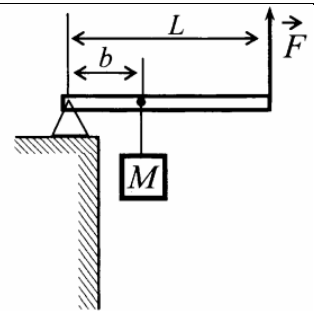
Решение

1. Поставленное условие будет выполняться при равенстве суммы алгебраических моментов относительно оси вращения нулю:

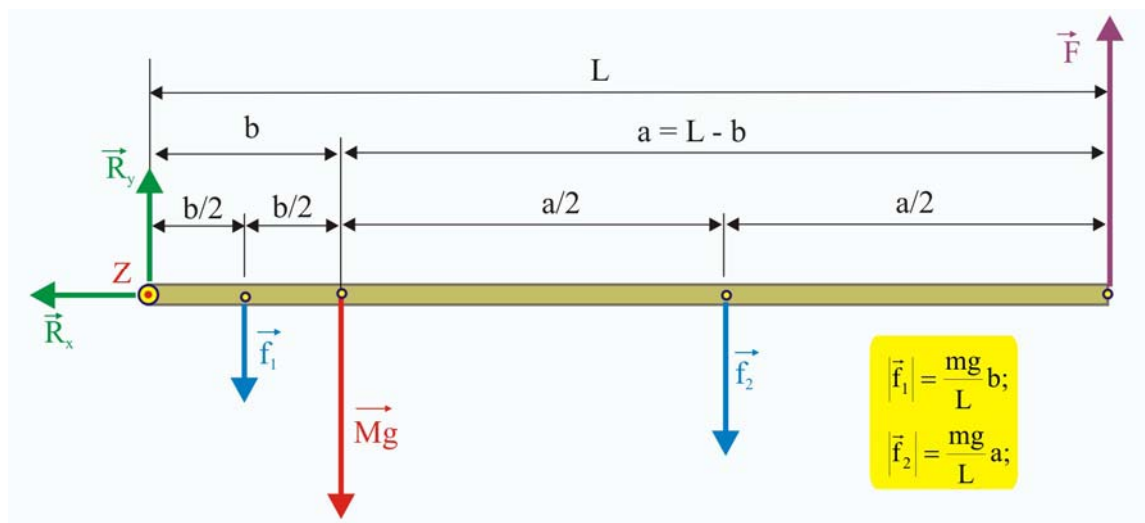
$$\sum_{i=1}^{i=2} M_Z(\vec{F}_i) = 0;$$

2. Отношение модулей приложенных к стержню сил $F_2/F_1 = 3$, указывает на то, что плечо силы F_1 должно быть больше плеча силы F_2 в три раза, это становится возможным, если ось вращения будет проходить через точку 4. В этом случае моменты сил относительно оси вращения будут равны по модулю и противоположны по направлению.

18. Груз массой 100 кг удерживают на месте с помощью рычага, приложив вертикальную силу 350 Н (см. рисунок). Рычаг состоит из шарнира без трения и однородного массивного стержня длиной 5 м. Расстояние от оси шарнира до точки подвеса груза равно 1 м. Чему равна масса стержня?



Решение



1. На стержень действует плоская система сил:

$$\{\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{f}_1, \vec{Mg}, \vec{f}_2, \vec{F}\}$$

стержень будет находиться в равновесии при равенстве нулю суммы алгебраических моментов сил относительно оси перпендикулярной плоскости чертежа:

$$\sum_{i=1}^{i=6} M_Z(\vec{F}_i) = 0;$$

2. В качестве точки стержня (исходя из заданных размеров), через которую следует провести ось, целесообразно выбрать левый, сопряжённый с шарниром конец, т.к. через эту точку проходят линии действия неизвестных реакций связи $\vec{R}_x$ и $\vec{R}_y$, моменты которых в этом случае будут равны нулю.

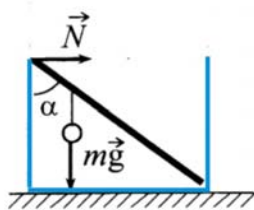
3. Уравнение моментов действующих сил относительно оси Z:

$$-f_1 \frac{b}{2} - Mgb - f_2 \left(b + \frac{a}{2} \right) + FL = 0;$$

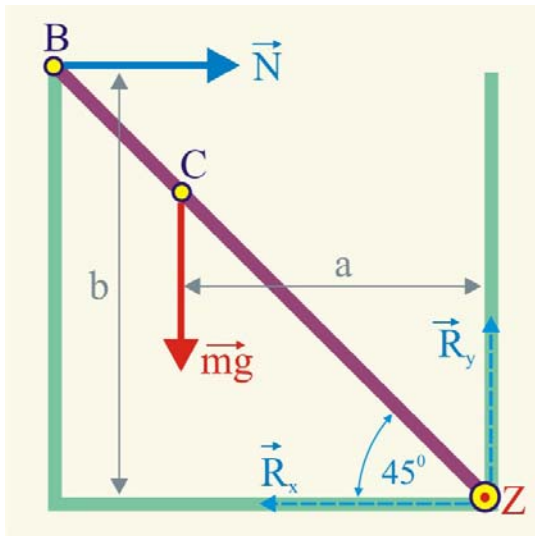
$$-\frac{mgb^2}{2L} - Mgb - \frac{mga}{L} \left(b + \frac{a}{2} \right) + FL = 0; \quad -\frac{mb^2}{2L} - Mb - \frac{ma}{L} \left(b + \frac{a}{2} \right) + \frac{F}{g} L;$$

$$m \left(\frac{b^2}{2L} + \frac{a}{L} \left(b + \frac{a}{2} \right) \right) = \frac{F}{g} L - Mb; \quad m = \frac{\frac{F}{g} L - Mb}{\left(\frac{b^2}{2L} + \frac{a}{L} \left(b + \frac{a}{2} \right) \right)};$$

$$m = \frac{35 \cdot 5 - 100}{0,1 + 0,8(1 + 2)} = 30 \text{ кг};$$



19. Невесомый стержень длиной 1 м, находящийся в ящике с гладкими дном и стенками, составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с вертикалью (см. рисунок). К стержню на расстоянии 25 см от его левого конца подвешен на нити шар массой 2 кг (см. рисунок). Каков модуль силы N , действующей на стержень со стороны левой стенки ящика?



Решение

1. Покоящийся стержень, по условию задачи, находится под действием системы четырёх плоских сил:

$$\{\vec{N}, m\vec{g}, \vec{R}_y, \vec{R}_x\}$$

суммарный алгебраический момент этих сил относительно произвольной оси должен быть равен нулю

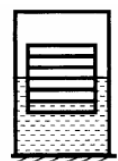
$$\sum_{i=1}^{i=4} M_Z(\vec{F}_i) = 0;$$

2. Исходя из геометрических особенностей, заданных размеров и упрощения уравнения моментов, ось Z целесообразно совместить с нижним концом стержня и направить перпендикулярно плоскости чертежа, в этом случае из уравнения будут исключены моменты сил $\vec{R}_x$ и $\vec{R}_y$ ввиду равенства нулю их плеч (линии действия сил пересекают ось Z):

$$Nb - mga = 0; \quad b = l \cos 45^\circ \approx 0,71 \text{ м}; \quad a = (l - BC) \cos 45^\circ = 0,53 \text{ м};$$

$$|\vec{N}| = \frac{mga}{b} \approx 14,9 \text{ Н};$$

20. Шесть одинаковых брусков толщиной $h = 5 \text{ см}$ каждый, связанные в стопку, плавают в воде так, что уровень воды приходится на границу между двумя средними брусками. Как изменится глубина погружения стопки, если из нее убрать один брусок?

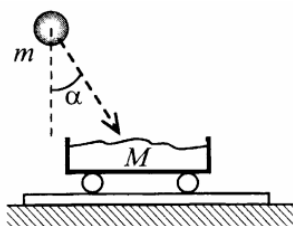


Решение

1. Условие плавания брусков заключается в равенстве модулей суммарной силы тяжести и суммарной силы Архимеда:

$$\left. \begin{aligned} 6mg &= \rho g 3Sh; \\ 5mg &= \rho g xSh; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{6}{5} = \frac{3}{x}; \quad x = 2,5;$$

граница воды будет проходить на уровне 2,5 бруска, т.е. глубина погружения изменится на половину толщины одного бруска, т.е. на 2,5 см.



21. Камень массой $m = 4$ кг падает под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали со скоростью 10 м/с в тележку с песком общей массой $M = 16$ кг, покоящуюся на горизонтальных рельсах. Чему равна скорость тележки с камнем после падения в нее камня?

Решение

1. Закон сохранения импульса в проекции на направления возможного перемещения тележки:

$$mv \sin \alpha = (M + m)u; \quad \Rightarrow \quad u = \frac{mv \sin \alpha}{M + m} = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

22. Снаряд массой 2 кг, летящий со скоростью 100 м/с, разрывается на два осколка. Один из осколков летит под углом 90° к первоначальному направлению. Под каким углом к этому направлению полетит второй осколок, если его масса 1 кг, а скорость 400 м/с?

Решение

1. Запишем уравнение второго закона Ньютона в следующем виде:

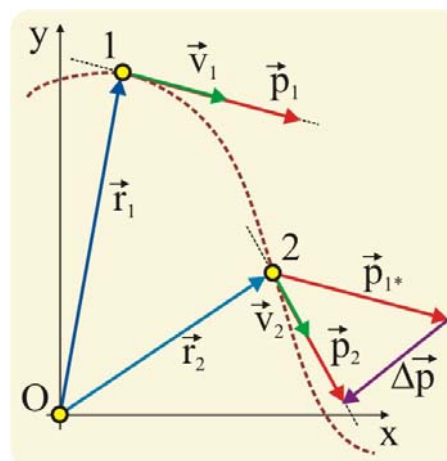
$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

2. Величина, стоящая в скобках (скалярное произведение массы точки на вектор её скорости) называется **импульсом точки** или количеством её движения. Естественно, что эта величина векторная и её направление совпадает с направлением вектора скорости, т.е. импульс материальной точки всегда направлен по касательной в данной точке траектории по вектору скорости. Импульс материальной точки служит количественной векторной мерой механического движения

3. Импульс не имеет специальной единицы измерения, его размерность устанавливается уравнением:

$$[p] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

4. Векторное уравнение является одной из форм записи второго закона Ньютона, на основании которой доказывается одна из общих теорем динамики, теоремы об



Импульс материальной точки

изменении импульса. Теорема читается так: «**Производная по времени от импульса материальной точки равна действующей на эту точку силе**».

5. Умножим уравнение второго закона Ньютона на бесконечно малый промежуток времени dt

$$\vec{F}dt = d\vec{p}, \quad d(m\vec{v}) = \vec{F}dt,$$

величина $\vec{F}dt$ – называется **элементарным импульсом действующей силы**. Уравнение выражает собой математическую запись теоремы об изменении импульса: «Дифференциал импульса (количества движения) материальной точки равен элементарному импульсу, действующей на точку силы».

5. Проинтегрируем уравнение с учётом того, что переменными величинами являются скорость и время

$$\int_{v_1}^{v_2} d(m\vec{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt.$$

Если сила не является функцией времени, то процесс интегрирования достаточно прост

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}(t_2 - t_1), \quad \Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t.$$

6. Изменение импульса материальной точки за конечный промежуток времени равно вектору действующей силы. Если к точке приложена система сил

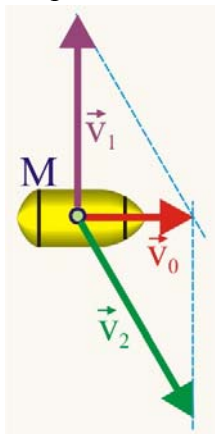
$$\sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k \cdot dt = d(m\vec{v}).$$

7. При решении практических задач большое значение имеет частный случай теоремы об изменении импульса. Если материальная точка не подвержена действию внешних сил, или система сил эквивалентна нулю, то

$$\text{если } \sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k = 0, \quad \text{то } d(m\vec{v}) = 0, \Rightarrow m\vec{v} = \text{const}.$$

8. Уравнение является **законом сохранения импульса материальной точки**. Если система сил, действующих на движущуюся материальную точку эквивалентна нулю, то вектор импульса остаётся неизменным.

9. Ввиду постоянства массы точки, уравнение закона сохранения импульса материальной точки указывает на неизменность вектора скорости, т.е. точка движется равномерно и прямолинейно. Использование закона сохранения импульса при решении практических задач, в ряде случаев, позволяет существенно упростить процесс, т.к. в этом случае отпадает необходимость составлять дифференциальные уравнения второго закона Ньютона и интегрировать их.



10. В рассматриваемой задаче разрыв снаряда происходит под действием внутренних сил, геометрическая сумма которых равна нулю, потому что в соответствии с третьим законом Ньютона они проявляются попарно (равны по модулю и противоположны по направлению), т.е. правомерно использовать закон сохранения импульса, памятуя о его векторном смысле.

11. Закон сохранения импульса в проекции на направление движения снаряда:

$$Mv_0 = m_2v_2 \cos \alpha; \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{Mv_0}{m_2v_2}\right) = 60^\circ;$$

проекция импульса первого осколка на направление движения ввиду его перпендикулярности направлению движения снаряда равна

нулю.

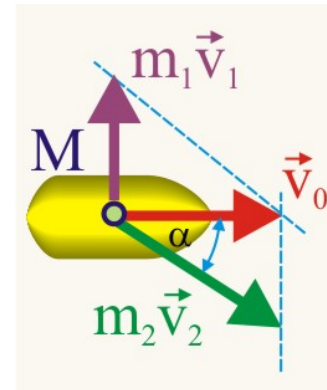
23. Снаряд, летящий с некоторой скоростью, разбивается на два осколка. Первый осколок летит под углом 90° к первоначальному направлению со скоростью 50 м/с, а второй – под углом 30° со скоростью 100 м/с. Найдите отношение массы первого осколка к массе второго осколка.

Решение

1. Из прямоугольного треугольника, образованного вектором импульса снаряда, и отрезками, соответствующими импульсам осколков с использованием определения синуса угла имеем:

$$\sin \alpha = \frac{|m_1 \vec{v}_1|}{|m_2 \vec{v}_2|}; \Rightarrow \zeta = \frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} \sin \alpha;$$

$$\zeta = \frac{100}{50} \cdot 0,5 = 1;$$



24. Тело массой $0,1$ кг брошено горизонтально со скоростью 4 м/с с высоты 2 м относительно поверхности Земли. Какова кинетическая энергия тела в момент его приземления? Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение

1. Движение тела протекает с постоянным ускорением свободного падения g , вектор которого перпендикулярен горизонтальной оси. вдоль оси ox движение будет равномерным со скоростью v_0 .

2. Вертикальная составляющая скорости в момент касания поверхности земли определится из закона сохранения механической энергии (сопротивление отсутствует, система консервативна):

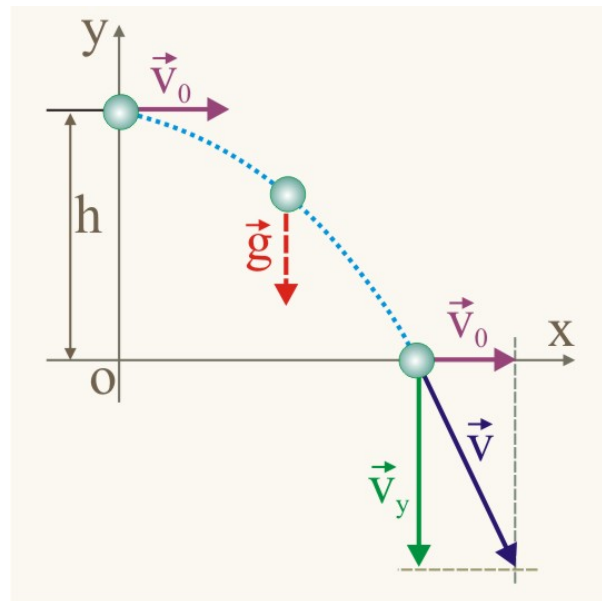
$$mgh = \frac{mv_y^2}{2}; \Rightarrow v_y^2 = 2gh;$$

3. Квадрат модуля вектора скорости тела в момент соприкосновения с землёй:

$$v^2 = v_0^2 + 2gh;$$

4. Кинетическая энергия тела в конечной точке траектории:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(v_0^2 + 2gh)}{2} = \frac{0,1(16 + 40)}{2} = 2,8 \text{ Дж};$$



25. Снаряд массой 200 г, выпущенный под углом 30° к горизонту, поднялся на высоту 4 м. Какой будет кинетическая энергия снаряда непосредственно перед его падением на Землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

1. Система кинематических уравнений движения снаряда, как тела, брошенного под углом к горизонту (см. задачу №2):

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha; & (1) \\ v_y &= v_0 \sin \alpha - gt; & (2) \\ x &= v_0 t \cos \alpha; & (3) \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}; & (4) \end{aligned} \right\}$$

2. В верхней точке траектории скорость снаряда горизонтальна, $v_y = 0$, поэтому из второго уравнения системы определим время подъёма в верхнюю точку траектории:

$$\tau = \frac{v_0 \sin \alpha}{g};$$

3. Заданная максимальная высота подъёма снаряда позволяет найти модуль начальной скорости:

$$y_{\max} = h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}; \Rightarrow v_0^2 = \frac{2gh}{\sin^2 \alpha};$$

4. Без учёта сопротивления движению, скорость начальная равна скорости конечной, в момент окончания полёта, поэтому:

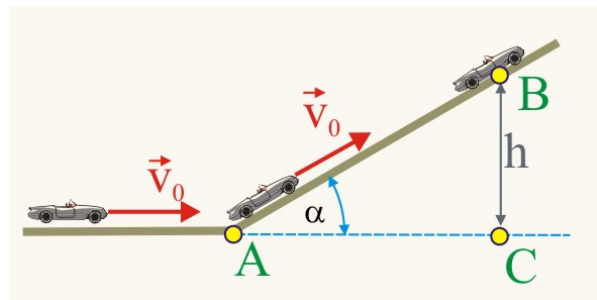
$$K = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mgh}{\sin^2 \alpha} \approx \frac{0,2 \cdot 10 \cdot 4}{0,25} \approx 32 \text{ Дж};$$

26. Автомобиль, двигаясь с выключенным двигателем, на горизонтальном участке дороги имеет скорость 20 м/с. Какое расстояние он проедет до полной остановки вверх по склону горы под углом 30° к горизонту? Трением пренебречь.

Решение

1. В точке А скорость автомобиля равна $v_0 = 20$ м/с, в точке В (предельная высота подъёма h) скорость равна нулю. В данном случае кинетическая энергия по ходу движения расходуется на работу против силы тяжести, а в точке остановки В энергия автомобиля только потенциальная. Система представляется консервативной, поэтому справедлив закон сохранения механической энергии:

$$mgh = \frac{mv_0^2}{2}; \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}; \Rightarrow AB = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha} \approx \frac{400}{20 \cdot 0,5} \approx 40 \text{ м};$$



27. Горизонтально расположенная невесомая пружина с жёсткостью $k = 1000$ Н/м находится в недеформированном состоянии. Один её конец закреплён, а другой касается бруска массой $M = 0,1$ кг, находящегося на горизонтальной поверхности. Брусок сдвигают, сжимая пружину, и отпускают. На какую длину Δx была сжата пружина, если после отпускания бруска его скорость достигла величины $v = 1$ м/с? Трение не учитывать.

Решение

1. Потенциальная энергия сжатой пружины трансформируется в кинетическую энергию бруса:

$$\frac{k\Delta x^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}; \Rightarrow \Delta x = v\sqrt{\frac{M}{k}} = 1\sqrt{\frac{0,1}{10^3}} = 10^{-2}\text{ м} = 1\text{ см};$$

28. Мальчик на санках (их общая масса 50 кг) спустился с ледяной горы и проехал по горизонтали до остановки 50 м. Коэффициент трения при его движении по горизонтальной поверхности равен 0,2. С какой высоты спустился мальчик? Считать, что по склону горы санки скользили без трения.

Решение

1. В начале спуска с горки высотой h без начальной скорости санки с мальчиком обладали потенциальной энергией $\Pi = mgh$, в течение спуска потенциальная энергия трансформировалась в кинетическую энергию:

$$K_1 = \Pi; \quad Mgh = \frac{Mv_1^2}{2},$$

которая, в свою очередь, была растрочена на работу против силы трения, вплоть до полной остановки, таким образом работа против силы трения, без учёта сопротивления воздуха, в соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии:

$$\frac{Mv_2^2}{2} - \frac{Mv_1^2}{2} = -A(F_{\text{тр}}); \quad \frac{Mv_2^2}{2} = 0; \Rightarrow Mgh = \mu Mg\ell; \Rightarrow h = \mu\ell = 10\text{ м};$$

29. Скорость брошенного мяча непосредственно перед ударом о стену была вдвое больше его скорости сразу после удара. Найдите кинетическую энергию мяча перед ударом, если при ударе выделилось количество теплоты, равное 15 Дж.

Решение

1. Изменение скорости мяча в 2 раза приводит к соответствующему изменению его кинетической энергии в 4 раза, в этой связи справедлива следующая система уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{K_1}{K_2} = 4; \\ K_1 - K_2 = Q; \end{array} \right\} \Rightarrow K_1 - \frac{K_1}{4} = Q; \quad \frac{3}{4}K_1 = Q; \quad K_1 = \frac{4Q}{3} = \frac{60}{3} = 20\text{ Дж};$$

30. Брусок массой $m_1 = 500$ г соскальзывает по наклонной поверхности с высоты $h = 0,8$ м и, двигаясь по горизонтальной поверхности, сталкивается с неподвижным бруском массой $m_2 = 300$ г. Считая столкновение абсолютно неупругим, определите изменение кинетической энергии первого бруска в результате столкновения. Трением при движении пренебречь. Считать, что наклонная плоскость плавно переходит в горизонтальную.

Решение

1. Скорость первого бруска в конце спуска с наклонной плоскости определяется законом сохранения механической энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = mgh; \quad v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{20 \cdot 0,8} = 4 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Кинетическая энергия первого бруска перед столкновением с неподвижным бруском:

$$K_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = m_1 gh;$$

3. Скорость совместного движения брусков после неупругого столкновения определится законом сохранения импульса:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2; \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{0,5 \cdot 4}{0,8} = 2,5 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

4. Изменение кинетической энергии первого бруска:

$$\Delta K = K_1 - K_2 = \frac{m_1}{2} (v_1^2 - v_2^2) = 0,25(16 - 6,25) \approx 2,44 \text{ Дж};$$

31. Кусок пластилина сталкивается со скользящим навстречу по горизонтальной поверхности стола бруском и прилипает к нему. Скорости пластилина и бруска перед ударом направлены противоположно и равны $v_{\text{пл}} = 15 \text{ м/с}$ и $v_{\text{бр}} = 5 \text{ м/с}$. Масса бруска в 4 раза больше массы пластилина. Коэффициент трения скольжения между бруском и столом $\mu = 0,17$. На какое расстояние переместятся слипшиеся брусок с пластилином к моменту, когда их скорость уменьшится на 30%?

Решение

1. Введём обозначения:

$$v = 5 \text{ м/с}; \quad v_{\text{пл}} = 3v; \quad v_{\text{бр}} = v; \quad m_{\text{бр}} = 4m; \quad m_{\text{пл}} = m;$$

2. Закон сохранения импульса для неупругого соударения бруска и пластилина в проекции на направление движения бруска:

$$4mv - 3mv = 5mu_1; \quad \Rightarrow \quad mv = 5mu_1; \quad u_1 = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

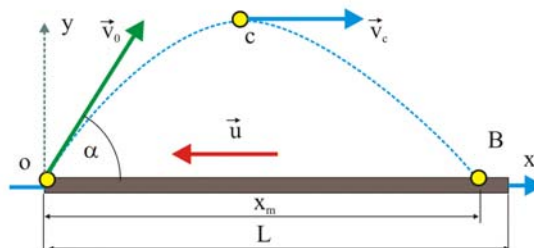
система брусок пластилин будет после столкновения двигаться в сторону первоначального направления движения бруска.

3. Расстояние, пройденное системой до уменьшения её скорости до $0,7u$ определится теоремой об изменении кинетической энергии системы:

$$\frac{5mu_1^2}{2} - \frac{5mu_2^2}{2} = A_{1 \rightarrow 2}; \quad A_{1 \rightarrow 2} = -\mu 5mg \Delta x; \quad u_2 = 0,7 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$u_1^2 - u_2^2 = 2\mu g \Delta x; \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2\mu g} = \frac{1 - 0,49}{3,4} = 0,15 \text{ м};$$

32. Лягушка массой $m = 0,1 \text{ кг}$ сидит на краю доски массой $M = 1 \text{ кг}$ длиной 2 м . Доска плавает в воде. Будучи безумно хитрой, лягушка прыгает под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту вдоль доски с начальной скоростью $v = 4 \text{ м/с}$. Определите, на какое расстояние нужно прыгнуть лягушке, чтобы попасть на противоположный



край доски. Определите скорость, которую имела доска в момент падения лягушки. Сила сопротивления движению доски в воде пропорциональна скорости: $R = kv$, где $k \cong 1 \text{ кг/с}$.

Решение

1. Очевидно, что лягушке до края доски нужно пролететь меньшее расстояние, чем длина доски, потому что горизонтальная составляющая импульса лягушки сообщит доске скорость u , направленную в сторону противоположную прыжку. Начальную скорость доски определим по закону сохранения импульса системы «лягушка – доска» в проекции на направление движения доски:

$$u_0 = mv \cos \alpha / M.$$

2. Найдём зависимость скорости доски от времени, с учётом действия силы сопротивления со стороны воды. Уравнение второго закона Ньютона в проекции на ось Ox представится так

$$ku = M \frac{du}{dt}, \Rightarrow \frac{k}{M} dt = \frac{du}{u}, \Rightarrow \frac{k}{M} \int_0^{t_m} dt = \int_{u_0}^u \frac{du}{u},$$

откуда,

$$u = u_0 e^{-\frac{kt_m}{M}},$$

где t_m – время полёта пресмыкающегося, которое можно определить из кинематических соотношений, считая, что полёт проходит по параболической траектории:

$$t_m = 2v \sin \alpha / g.$$

3. Определим величину скорости доски:

$$u = \frac{mv \cos \alpha}{M} \cdot \exp\left(-\frac{2kv \sin \alpha}{Mg}\right) \cong 0,16 \text{ м/с}.$$

4. Перемещение доски по водной глади будет равнозамедленным с ускорением $a = kv/m$, поэтому её смещение за время полёта лягушки составит:

$$x_1 = \frac{at_m^2}{2} = \frac{kv}{2m} \cdot \frac{4v^2 \sin^2 \alpha}{g^2} = \frac{2kv^3 \sin^2 \alpha}{mg^2} \cong 0,64 \text{ м}.$$

5. Дальность полёта лягушки определится очевидным образом:

$$x_m = L - x_1 \cong 1,36 \text{ м}.$$

33. Пуля летит горизонтально со скоростью $v_0 = 150 \text{ м/с}$, пробивает стоящий на горизонтальной поверхности льда брусок и продолжает движение в прежнем направлении со скоростью $\frac{v_0}{3}$. Масса бруска в 10 раз больше массы пули. Коэффициент трения скольжения между бруском и льдом $\mu = 0,1$. На какое расстояние s сместится брусок к моменту, когда его скорость уменьшится на 10%?

Решение

1. Скорость бруска u_1 после прострела пулей определится законом сохранения импульса с проекции на направление полёта пули:

$$mv_0 - m \frac{v_0}{3} = 10mu_1; \quad u_1 = \frac{150 - 50}{10} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Расстояние проделанное бруском к моменту уменьшения его скорости до величины $u_2 = 0,9u_1 = 9 \text{ м/с}$ определится посредством теоремы об изменении кинетической энергии:

$$\frac{10mu_1^2}{2} - \frac{10mu_2^2}{2} = \mu 10mg \Delta x; \Rightarrow \Delta x = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2\mu g} = \frac{100 - 81}{2} = 9,5 \text{ м};$$

34. Шар массой 1 кг, подвешенный на нити длиной 90 см, отводят от положения равновесия и отпускают. В момент прохождения шаром положения равновесия в него попадает пуля массой 10 г, летящая навстречу шару со скоростью 300 м/с. Она пробивает его и вылетает горизонтально со скоростью 200 м/с, после чего шар, продолжая движение в прежнем направлении, отклоняется на угол 39° . Определите начальный угол отклонения шара. (Массу шара считать неизменной, диаметр шара – пренебрежимо малым по сравнению с длиной нити, $\cos 39^\circ = \frac{7}{9}$.)

Решение

1. Примем за нулевой уровень потенциальной энергии шара уровень центра масс шара в положении статического равновесия. В этом случае высота подъема центра масс шара после взаимодействия с пулей определится как:

$$h_2 = \ell(1 - \cos\beta) = 0,9(1 - 0,777) \approx 0,2\text{ м};$$

2. Скорость шара после взаимодействия с пулей найдём, используя закон сохранения механической энергии:

$$\frac{Mu_2^2}{2} = Mgh_2; \Rightarrow u_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{20 \cdot 0,2} = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

3. Изменение скорости шара в результате взаимодействия с пулей:

$$mv_1 - mv_2 = M\Delta u; \Rightarrow \Delta u = \frac{m(v_1 - v_2)}{M} = \frac{10^{-2}(300 - 200)}{1} = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

4. Скорость шара до встречи с пулей:

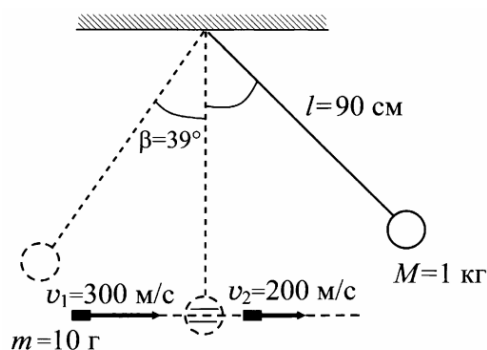
$$u_1 = u_2 + \Delta u = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

5. Высота подъема центра масс шара при колебаниях до встречи с пулей:

$$\frac{Mu_1^2}{2} = Mgh_2; \Rightarrow h_2 = \frac{u_1^2}{2g} = \frac{9}{20} = 0,45\text{ м};$$

6. Максимальный начальный угол отклонения нити подвеса шара:

$$h_2 = \ell(1 - \cos\alpha); \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\ell - h_2}{\ell}\right) = \arccos\left(\frac{0,9 - 0,45}{0,9}\right) = 60^\circ;$$



35. Снаряд массой 4 кг, летящий со скоростью 400 м/с, разрывается на две равные части, одна из которых летит в направлении движения снаряда, а другая – в противоположную сторону. В момент разрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличилась на величину ΔE . Скорость осколка, летящего по направлению движения снаряда, равна 900 м/с. Найдите ΔE .

Решение

1. Изменение суммарной кинетической энергии осколков происходит за счёт дополнительной скорости, приобретаемой осколками за счёт внутренних сил взрыва, при этом осколки относительно снаряда приобретают скорости равные по модулю и противоположные по направлению (массы осколков одинаковы)

$$\Delta v = v_{\text{сн}} - v_{\text{оск}} = 500 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Изменение кинетической энергии одного осколка массой $m = M/2$:

$$\Delta K = \frac{M\Delta v^2}{4};$$

3. Увеличение кинетической энергии двух осколков:

$$\Delta E = 2\Delta K = \frac{M\Delta v^2}{2} = \frac{4 \cdot 500^2}{2} = 5 \cdot 10^5 \text{ Дж} = 0,5 \text{ МДж};$$

36. При выполнении трюка «Летающий велосипедист» гонщик движется по гладкому трамплину под действием силы тяжести, начиная движение из состояния покоя с высоты H (см. рисунок). На краю трамплина скорость гонщика направлена под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Пролетев по воздуху, он приземлился на горизонтальный стол на той же высоте, что и край трамплина. Каково время полета?

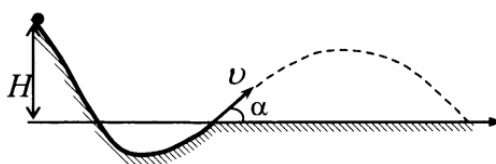
Решение

1. Скорость велосипедиста на краю трамплина:

$$v_0 = \sqrt{2gH};$$

2. Время полёта велосипедиста, как тела брошенного под углом α к горизонту:

$$\tau = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2\sqrt{2gH} \sin \alpha}{g} = \frac{\sqrt{8gH} \cdot 0,87}{g} = \sqrt{\frac{8H \cdot 0,75}{g}} = \sqrt{\frac{6H}{g}};$$



37. Шайба массой m начинает движение по желобу АВ из точки А из состояния покоя. Точка А расположена выше точки В на высоте $H = 6$ м. В процессе движения по желобу механическая энергия шайбы из-за трения уменьшается на $E = 2$ Дж. В точке В шайба вылетает из желоба под углом $\alpha = 15^\circ$ к горизонту и падает на землю в точке D, находящейся на одной горизонтали с точкой В (см. рисунок). $BD = 4$ м. Найдите массу шайбы m . Сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение

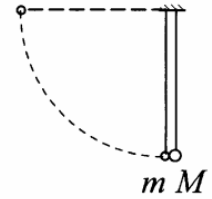
1. Заданная дальность полёта шайбы позволяет определить начальную скорость перед полётом в из точки В в точку D

$$x_{\max} = BD = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}; \Rightarrow v_0^2 = \frac{x_{\max} g}{\sin 2\alpha};$$

2. Уменьшение энергии при движении шайбы по желобу можно выразить законом сохранения механической энергии:

$$mgH - \frac{mv_0^2}{2} = \Delta E; \Rightarrow m = \frac{\Delta E}{gH - \frac{x_{\max} g}{2 \sin 30^\circ}} = \frac{2}{60 - 40} = 0,1 \text{ кг};$$

38. Два шарика, массы которых $m = 0,1$ кг и $M = 0,2$ кг, висят, соприкасаясь, на вертикальных нитях длиной $l = 1,5$ м (см. рисунок). Левый шарик отклоняют на угол 90° и отпускают без начальной скорости. Какое количество теплоты выделится в результате абсолютно неупругого удара шариков?



Решение

1. Скорость левого шарика перед столкновением:

$$m_1 g l = \frac{m_1 v_1^2}{2}; \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl};$$

2. Скорость совместного движения шариков после соударения:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u; \Rightarrow u = \frac{m_1 \sqrt{2gl}}{m_1 + m_2} \approx \frac{0,1 \sqrt{20 \cdot 1,5}}{0,3} \approx 1,83 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

3. Высота совместного подъёма шариков над нулевым уровнем потенциальной энергии:

$$\frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} = (m_1 + m_2) g h_1; \Rightarrow h_1 = \frac{u^2}{2g} \approx \frac{3,35}{20} \approx 0,167 \text{ м};$$

4. Количество энергии, перешедшей в тепло, в результате неупругого взаимодействия шариков:

$$\Delta Q = \Pi_1 - \Pi_2 = m_1 g l - (m_1 + m_2) g h_1 \approx 0,1 \cdot 10 \cdot 1,5 - 0,3 \cdot 10 \cdot 0,167 \approx 1 \text{ Дж};$$

39. Шарик скользит без трения по наклонному желобу, а затем движется по «мертвой петле» радиуса R . С какой силой шарик давит на желоб в нижней точке петли, если масса шарика равна 100 г, а высота, с которой его отпускают, равна $4R$?

Решение

1. Потенциальная энергия шарика в начале его спуска по наклонному желобу равна, в соответствии с законом сохранения механической энергии, его кинетической энергии в начале кругового движения по петле:

$$\Pi = \frac{mv^2}{2}; \quad mg8R = \frac{mv^2}{2}; \Rightarrow v^2 = 8gR;$$

2. При движении шарика по круговой траектории будет возникать нормальное (центростремительное) ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

, что в соответствии с принципом Д Аламбера при добавлении к системе действующих сил фиктивной силы инерции, шарик рассматривать как неподвижный, в нижней точке петли нормальная реакция связи определится в виде суммы силы тяжести и силы инерции:

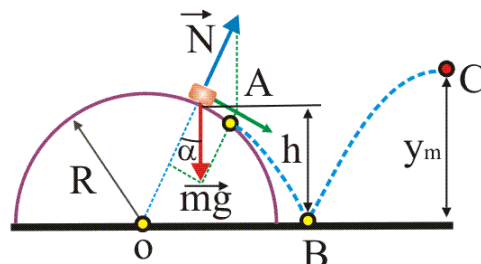
$$N = mg + \frac{mv^2}{R} = m(g + 8g) = 9mg = 9 \text{ Н};$$

40. Небольшая упругая частица скользит с наивысшей точки купола, имеющего форму полусферы радиуса R и упруго отразившись от горизонтальной поверхности, снова подскакивает вверх. Определите высоту точки отрыва частицы от купола и высоту её подъёма после отскока. Трением пренебречь.

Решение

1. Уравнение второго закона Ньютона в проекции на направление нормальной реакции связи N будет выглядеть в данном случае следующим образом

$$\frac{mv^2}{R} = mg \cos \alpha - N.$$



2. В момент отрыва частицы от поверхности полусферы (точка A) проекция силы тяжести на выбранное выше направление по модулю должна быть равна силе инерции, т.е. $N = 0$, поэтому уравнение примет вид:

$$mg \cos \alpha = mv^2/R.$$

3. В соответствии с законом сохранения энергии в точке A сумма кинетической и потенциальной энергии частицы должна быть равна её потенциальной энергии в верхней точке полусферы

$$mgR = mgR \cos \alpha + mv^2/2.$$

4. Совместное решение уравнений позволяет получить следующие соотношения

$$\cos \alpha = \frac{2}{3}, \quad v^2 = \frac{2}{3}Rg, \quad h = R \cos \alpha = \frac{2}{3}R.$$

5. После упругого соударения с горизонтальной поверхностью частица по параболической траектории полетит как тело, брошенное под углом α к горизонту, причём на высоте h её скорость будет равна скорости в точке отрыва

$$|v| = \sqrt{\frac{2Rg}{3}}.$$

6. Максимальная высота подъёма частицы над горизонтом y_m определится как сумма $y_m = h + \Delta y$, т.е.

$$y_m = h + \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{23}{27}R.$$

41. Брусок, покоящийся на горизонтальном столе, и пружинный маятник, состоящий из грузика и легкой пружины, связаны легкой нерастяжимой нитью через идеальный блок (см. рисунок). Коэффициент трения между основанием бруска и поверхностью стола равен 0,2. Отношение массы бруска к массе грузика равно 8. Грузик маятника совершает колебания вдоль вертикали, совпадающей с вертикальным отрезком нити. Максимально возможная амплитуда этих колебаний, при которой они остаются гармоническими, равна 1,5 см. Чему равен период этих гармонических колебаний?

Решение

1. Вертикальные колебания груза можно, в первом приближении считать малыми при покое тела на горизонтальной шероховатой плоскости, сила натяжения нити определяется, в данном случае, суммой силы тяжести груза и силой упругости пружины, которая будет иметь максимальные значения при амплитудных смещениях:

$$mg + kA = \mu 8mg;$$

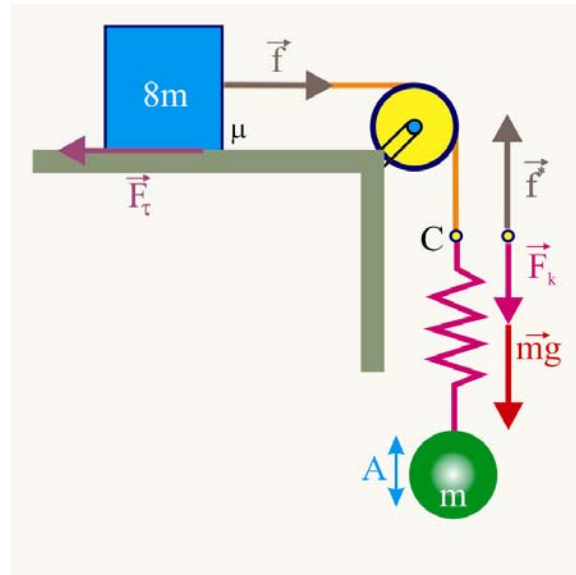
2. Коэффициент упругости пружины выразим через период малых колебаний груза:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2};$$

3. Подставим значение коэффициента упругости в условие гармоничности колебаний:

$$mg + \frac{4\pi^2 mA}{T^2} - 8\mu mg = 0; \quad mgT^2 - 8\mu mgT^2 + 4\pi^2 mA = 0;$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 A}{8\mu g - g}} \approx \sqrt{\frac{0,6}{6}} \approx 0,31 \text{ с};$$



Молекулярная физика и термодинамика

42. В горизонтальном цилиндрическом сосуде, закрытом подвижным поршнем, находится одноатомный идеальный газ. Давление окружающего воздуха $p = 10^5$ Па. Трение между поршнем и стенками сосуда пренебрежимо мало. В процессе медленного охлаждения от газа отведено количество теплоты $|Q| = 75$ Дж. При этом поршень передвинулся на расстояние $x = 10$ см. Чему равна площадь поперечного сечения поршня?

Решение

1. Горизонтальное движение поршня без трения позволяет ему "отслеживать" изменение давления, сохраняя его постоянство в закрытом объёме, налицо изобарный процесс изменения состояния идеального одноатомного газа. Внутренняя энергия газа уменьшается и совершается механическая работа при перемещении поршня. Первое начало термодинамики запишется следующим образом:

$$Q = \Delta U + p \int_{V_1}^{V_2} dV = \Delta U + p\Delta V,$$

где

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T;$$

2. Значение произведения $\nu R \Delta T$ определится из уравнения состояния (Клапейрона-Менделеева)

$$p\Delta V = \nu R \Delta T;$$

3. С учётом полученных соотношений, уравнение первого начала термодинамики примет вид:

$$Q = \frac{3}{2} p\Delta V + p\Delta V = 2,5 p\Delta V = 2,5 p S \Delta x;$$

$$S = \frac{Q}{2,5 p \Delta x} = \frac{75}{2,5 \cdot 10^5 \cdot 0,1} \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

43. Один моль одноатомного идеального газа переводят из состояния 1 в состояние 2 таким образом, что в ходе процесса давление газа возрастает прямо пропорционально его объёму. В результате плотность газа уменьшается в $\alpha = 2$ раза. Газ в ходе процесса получает количество теплоты $Q = 20$ кДж. Какова температура газа в состоянии 1?

Решение

1. Первое начало термодинамики для заданного процесса:

$$Q = \Delta U + p \int_{V_1}^{V_2} dV = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1) + \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1);$$

2. Выразим температуры T_1 и T_2 из соответствующих уравнений состояния:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1; \Rightarrow T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu R}; \quad T_2 = \frac{p_2 V_2}{\nu R};$$

3. Изменение внутренней энергии газа в заданном процессе (объём увеличивается в два раза):

$$\Delta U = \frac{3}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1),$$

но по условию задачи:

$$V_2 = 2V_1; \quad p_2 = \frac{p_1 V_2}{V_1} = \frac{p_1 2V_1}{V_1} = 2p_1; \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \frac{3}{2}(4p_1 V_1 - p_1 V_1) = \frac{9}{2}p_1 V_1;$$

4. Работа, совершённая газом:

$$A_{1 \rightarrow 2} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{p_1 + 2p_1}{2}(2V_1 - V_1) = \frac{3}{2}p_1 V_1;$$

5. Первое начало термодинамики:

$$Q = \Delta U + A_{1 \rightarrow 2} = 6p_1 V_1; \quad \Rightarrow \quad p_1 V_1 = \frac{Q}{6} = \nu RT_1; \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{Q}{6\nu R} \approx \frac{2 \cdot 10^4}{6 \cdot 1 \cdot 8,3} \approx 402 \text{ К};$$

44. Один моль аргона, находящийся в цилиндре при температуре $T_1 = 600 \text{ К}$ и давлении $p_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ Па}$, расширяется и одновременно охлаждается так, что его температура при расширении обратно пропорциональна объёму. Конечное давление газа $p_2 = 10^5 \text{ Па}$. На какую величину изменилась внутренняя энергия аргона в результате расширения?

Решение

1. Давление идеального газа пропорционально концентрации его молекул n и абсолютной температуре T , для рассматриваемого случая:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= n_1 k_B T_1; \\ p_2 &= n_2 k_B T_2; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{n_1 T_1}{n_2 T_2}; \quad \frac{p_1}{p_2} = 4; \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{T_1}{T_2} = 2; \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{T_1}{2} = 300 \text{ К};$$

2. Изменение внутренней энергии аргона ($i = 3$):

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R (T_1 - T_2) = 1,5 \cdot 1 \cdot 8,3 \cdot 300 \approx 3735 \text{ Дж};$$

45. Над одноатомным идеальным газом проводится циклический процесс, показанный на рисунке. На участке 1–2 газ совершает работу $A_{12} = 1000 \text{ Дж}$. Участок 3–1 – адиабата. Количество теплоты, отданное газом за цикл холодильнику, равно $|Q_{\text{хол}}| = 3370 \text{ Дж}$. Количество вещества газа в ходе процесса не меняется. Найдите работу $|A_{31}|$ внешних сил на адиабате.

Решение

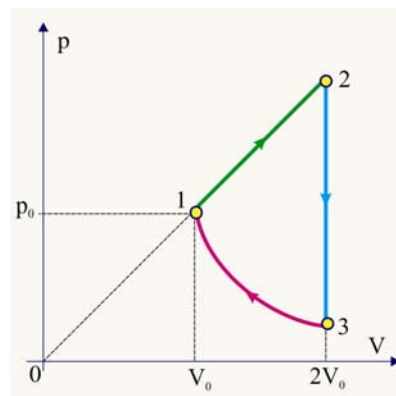
1. На участке 1 – 2 газ, получая некоторое количество теплоты изменяет свою внутреннюю энергию и совершает работу. Уравнение первого начала термодинамики для участка цикла $1 \rightarrow 2$ будет выглядеть так:

$$Q_H = Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{2 \rightarrow 1},$$

2. На участке 2 – 3 процесс протекает по изохорной схеме, работы не совершается, газ (рабочее тело) отдаёт холодильнику теплоту Q_X , причём:

$$|Q_X| = \Delta U_{2 \rightarrow 3};$$

3. На участке 3 – 1 внешние силы сжимают газ, совершают работу:



$$|A_{3 \rightarrow 1}| = U_1 - U_3;$$

4. Количество теплоты, отданное газом холодильнику можно представить в виде суммы:

$$|Q_X| = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \Delta U_{2 \rightarrow 3} = (U_2 - U_1) + (U_1 - U_3) = (U_2 - U_1) + |A_{3 \rightarrow 1}|;$$

5. Для определения изменения внутренней энергии газа на участке 1 – 2 определим соотношение давлений с учётом линейности этого участка:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1} = 2; \Rightarrow p_2 = 2p_0;$$

6. Изменение внутренней энергии на участке 1 – 2:

$$U_2 - U_1 = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{2}(2p_0 2V_0 - p_0 V_0) = 4,5p_0 V_0;$$

7. С другой стороны:

$$|A_{1 \rightarrow 2}| = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{2p_0 + p_0}{2}(2V_0 - V_0) = 1,5p_0 V_0,$$

или:

$$U_2 - U_1 = 3A_{1 \rightarrow 2}; \Rightarrow |A_{3 \rightarrow 1}| = |Q_X| - 3A_{1 \rightarrow 2} = 3370 - 3000 = 370 \text{ Дж};$$

46. В помещении объёмом 100 м^3 увеличили температуру с $T_1 = 273 \text{ К}$ до $T_2 = 300 \text{ К}$. Считая давление постоянным и равным нормальному атмосферному $p_0 = 0,1 \text{ МПа}$, определить, изменится ли суммарная внутренняя энергия воздуха, находящегося в помещении.

Решение

1. На первый взгляд может показаться, что с увеличением температуры внутренняя энергия воздуха, равная сумме энергий поступательного и вращательного движений молекул воздуха ($i = 6$, $\mu = 3 \cdot 10^{-2} \text{ кг/моль}$) должна возрасти. Естественно это так, но применительно к каждой молекуле в отдельности, а вот суммарная энергия останется постоянной, потому что при нагревании часть молекул покинет комнату. Подтвердим это предположение расчетом.

2. Используя уравнение Клапейрона-Менделеева, определим массу воздуха в заданном объёме

$$m_1 = \frac{p_0 V \mu}{RT_1} \cong \frac{10^5 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{8,3 \cdot 273} \cong 132 \text{ кг},$$

$$m_2 = \frac{p_0 V \mu}{RT_2} \cong \frac{10^5 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{8,3 \cdot 300} \cong 120 \text{ кг}.$$

3. Определим далее количество молекул, составляющих найденные массы

$$N_1 = \frac{m_1 N_A}{\mu} = \frac{132 \cdot 6 \cdot 10^{23}}{3 \cdot 10^{-2}} \cong 2,64 \cdot 10^{27},$$

$$N_2 = \frac{m_2 N_A}{\mu} = \frac{120 \cdot 6 \cdot 10^{23}}{3 \cdot 10^{-2}} \cong 2,4 \cdot 10^{27}.$$

4. Найдём величины суммарной внутренней энергии воздуха в двух заданных его состояниях

$$\Delta U_1 = N_1 \frac{i}{2} k_B T_1 = 3 \cdot 1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 273 \cdot 2,64 \cdot 10^{27} \cong 3 \cdot 10^7 \text{ Дж}.$$

$$\Delta U_2 = N_2 \frac{i}{2} k_B T_2 = 3 \cdot 1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 2,4 \cdot 10^{27} \cong 3 \cdot 10^7 \text{ Дж}.$$

5. Таким образом, внутренняя энергия воздуха в помещении остаётся неизменной. Это совсем не значит, что не следует нагревать помещение, потому что скорости теплового движения возрастают, они пропорциональны $\sqrt{T}$.

47. Сферическую оболочку воздушного шара делают из материала, квадратный метр которого имеет массу 1 кг. Шар наполняют гелием при атмосферном давлении 10^5 Па. Определите минимальную массу оболочки, при которой шар начнет поднимать сам себя. Температура гелия и окружающего воздуха одинакова и равна 0°C . (Площадь сферы $S = 4\pi r^2$, объем шара $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.)

Решение

1. Сила Архимеда возникающая вследствие разности плотностей воздуха и аргона в одинаковых внешних условиях:

$$\rho_B = \frac{p_0 \mu_B}{RT_0} \approx \frac{10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 273} \approx 1,3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$\rho_{\text{He}} = \frac{p_0 \mu_{\text{He}}}{RT_0} = \frac{10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 273} \approx 0,179 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

$$\Delta \rho = 1,12 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

2. Условие начала подъёма шара (без нагрузки) позволяет определить предельное значение радиуса шара r при заданной поверхностной массе оболочки ζ :

$$(m_{\text{об}} + m_{\text{He}})g \leq F_A;$$

$$m_{\text{об}}g = \zeta 4\pi r^2 g. \quad m_{\text{He}}g = \rho_{\text{He}} \frac{4}{3}\pi r^3 g;$$

$$4\pi \zeta r^2 g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{He}} g \leq \Delta \rho \frac{4}{3}\pi r^3 g; \quad \zeta + \frac{\rho_{\text{He}} r}{3} \approx \frac{\Delta \rho r}{3}; \quad 3\zeta = r(\Delta \rho - \rho_{\text{He}});$$

$$r = \frac{3\zeta}{\Delta \rho - \rho_{\text{He}}} \approx \frac{3}{1,12 - 0,179} \approx 3\text{м};$$

3. Минимальная масса оболочки:

$$m_{\text{min}} = m_{\Sigma} - m_{\text{He}} = 4\pi \zeta r^2 - \rho_{\text{He}} \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 12,56 \cdot 1 \cdot 9 - 0,179 \cdot 4,2 \cdot 27 \approx 93\text{кг};$$

48. Зависит ли подъёмная сила аэростата от температуры окружающего воздуха, если при подъёме температура меняется линейно?

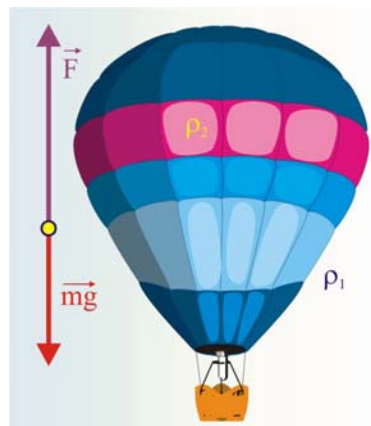
Решение

1. Подъёмная сила аэростата при прочих равных условиях зависит от разности плотностей воздуха ρ_1 и находящегося внутри газа ρ_2

$$F = (\rho_1 - \rho_2)gV,$$

где V – объём аэростата.

2. Между плотностью и температурой существует зависимость, которую можно установить из уравнения Клапейрона-Менделеева



$$p = \frac{m}{\mu V} RT = \rho \frac{RT}{\mu}.$$

3. Давление внутри и снаружи оболочки аэростата одинаково, поэтому уравнение можно переписать для двух точек подъёма аэростата (двух температурных точек) следующим образом

$$\frac{\rho_1}{\mu_1} RT = \frac{\rho_2}{\mu_2} RT, \Rightarrow \frac{\rho_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2}{\mu_2}.$$

4. Перепишем последнее уравнение с учётом значения $\rho_2 = m_2/V$ и выразим комбинацию величин $\rho_1 V$

$$\frac{\rho_1}{\mu_1} = \frac{m_2}{V\mu_2}, \Rightarrow \rho_1 V = \frac{\mu_1}{\mu_2} m_2.$$

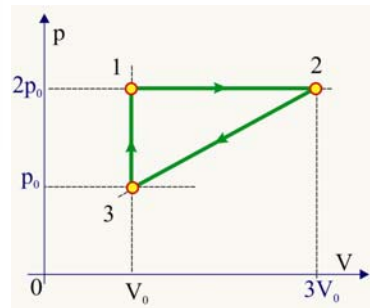
5. Подставим последнее соотношение в исходное уравнение

$$F = \rho_1 V g - \rho_2 V g = \frac{\mu_1}{\mu_2} m_2 g - \frac{m_2}{V} V g = m_2 g \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right).$$

Как видно из полученного выражения, подъемная сила аэростата не зависит от температуры.

49. С одноатомным идеальным газом неизменной массы происходит циклический процесс, показанный на рисунке. За цикл газ совершает работу $A_{\text{ц}} = 5$ кДж. Какое количество теплоты газ получает за цикл от нагревателя?

Решение



1. Работа совершается газом на участке цикла 1 – 2, на участке 2 – 3 над газом совершается работа (его сжимают, на участке 3 – 1 (изохорный процесс) газ не совершает работы, а увеличивает свою внутреннюю энергию за счёт подводимой от нагревателя теплоты.

2. Определим значение произведения $p_0 V_0$ по заданной работе цикла $A_{1 \rightarrow 2}$:

$$A_{1 \rightarrow 2} = 2p_0(3V_0 - V_0) = 4p_0 V_0; \Rightarrow p_0 V_0 = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ кДж};$$

3. Изменение внутренней энергии на участке 1 – 2:

$$\Delta U_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{3}{2}(2p_0 3V_0 - 2p_0 V_0) = 6p_0 V_0 = 7,5 \text{ кДж};$$

4. Величина работы над газом на участке 2 – 3:

$$A_{2 \rightarrow 3} = \frac{p_2 + p_3}{2}(3V_0 - V_0) = 3p_0 V_0 = 3,75 \text{ кДж};$$

5. Изменение внутренней энергии на участке 2 – 3:

$$\Delta U_{2 \rightarrow 3} = \frac{3}{2}(2p_0 3V_0 - p_0 V_0) = 7,5p_0 V_0 \approx 9,4 \text{ кДж};$$

6. Изменение внутренней энергии на участке 3 – 1:

$$\Delta U_{3 \rightarrow 1} = \frac{3}{2}(2p_0 V_0 - p_0 V_0) = 1,5p_0 V_0 = 1,9 \text{ кДж};$$

7. Количество теплоты, полученное от нагревателя:

$$Q_H = |A_{1 \rightarrow 2}| + |\Delta U_{1 \rightarrow 2}| + |A_{2 \rightarrow 3}| + |\Delta U_{2 \rightarrow 3}| + |\Delta U_{3 \rightarrow 1}| \approx 5 + 7,5 + 3,75 + 9,4 + 1,9 \approx 27,55 \text{ кДж};$$

50. В сосуде объёмом $V = 0,02 \text{ м}^3$ с жёсткими стенками находится одноатомный газ при атмосферном давлении. В крышке сосуда имеется отверстие площадью s , заткнутое пробкой. Максимальная сила трения покоя F пробки о края отверстия равна 100 Н. Пробка выскакивает, если газу передать количество теплоты не менее 15 кДж. Определите значение s , полагая газ идеальным.

Решение

1. Условие равновесия пробки поперечным сечением S в горлышке сосуда объёмом V при внешнем атмосферном давлении p_0 :

$$F + p_0 S \leq p_i S; \Rightarrow S = \frac{F}{p_i - p_0};$$

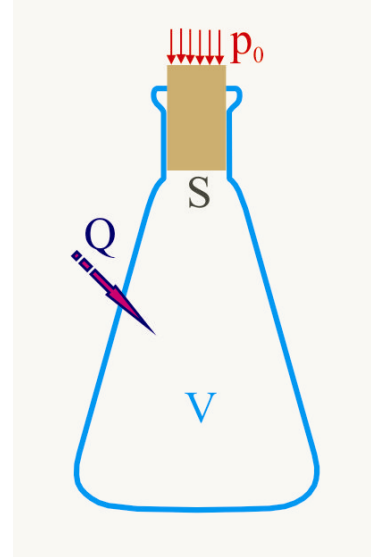
2. Критическое давление p_i внутри сосуда возникает при увеличении до определённой величины внутренней энергии находящегося там воздуха при передаче ему теплоты Q от внешнего источника

$$Q = \Delta U = \frac{3}{2}(p_i V - p_0 V) = \frac{3}{2} V(p_i - p_0);$$

$$p_i = \frac{2Q}{3V} + p_0 = \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} + 1 \cdot 10^5 = 6 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

3. Поперечное сечение пробки:

$$S = \frac{F}{p_i - p_0} = \frac{100}{6 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^5} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$



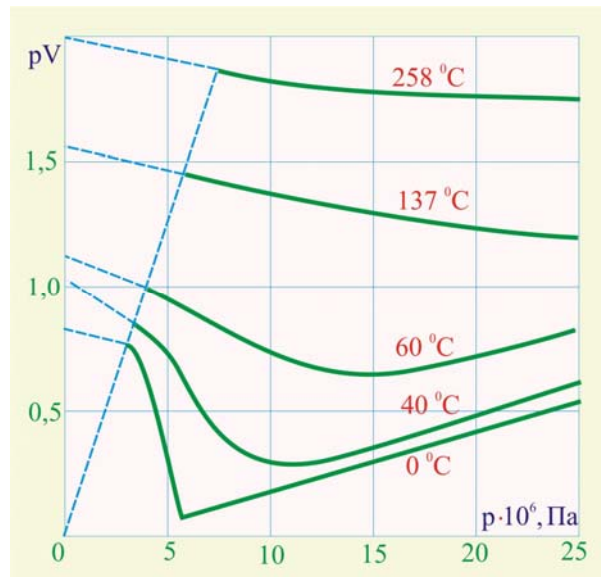
51. В цилиндрическом сосуде под поршнем длительное время находятся вода и ее пар. Поршень начинают выдвигать из сосуда. При этом температура воды и пара остается неизменной. Как будет меняться при этом масса жидкости в сосуде? Ответ поясните, указав, какие физические закономерности вы использовали для объяснения.

Решение

1. Запишем основное уравнение молекулярно-кинетической теории

$$pV = \frac{1}{3} N m \bar{c}^2,$$

где N – число молекул идеального газа, m – масса газа, $\bar{c}$ – средняя квадратичная скорость молекул. Для фиксированной массы газа при неизменной температуре правая часть уравнения сохраняет некоторое постоянное значение, следовательно, и произведение давления на объём тоже остаётся неизменным, в чём, собственно и заключается суть закона Бойля – Мариотта: **для данной массы газа при постоянной температуре произведение его объёма на давление есть величина постоянная.** Когда лабораторная техника позволила создавать высокие давления и низкие темпе-



Изотермы реального газа

ратуры, то оказалось, что закон выполняется при относительно низких давлениях и высоких температурах, причём при прочих равных условиях различные газы демонстрировали разную степень отклонения от закона Бойля – Мариотта. Отсутствие постоянства произведения давления на объём, вообще то не является удивительным, потому что при выводе уравнений идеального газа молекулы принимались за материальные точки, имеющие массу, но не обладающие объёмом. В случае, когда молекулы расположены на расстояниях, значительно превышающих их собственные размеры, такие допущения корректны, в случае высоких давлений плотность газов увеличивается, молекулы располагаются на расстояниях, при которых наблюдается взаимодействие между ними и начинает сказываться их собственный объём.

2. Радиус молекул большинства газов составляет $\cong 10^{-10}$ м, при этом одна молекула занимает объём порядка $\cong 4 \cdot 10^{-30}$ м³. При нормальных условиях в 1 см³ содержится $N \cong 2,7 \cdot 10^{19}$ молекул, которые имеют собственный объём $1,2 \cdot 10^{-6}$ м³, что составляет одну десятитысячную от всего объёма, занятого газом. Если бы закон Бойля – Мариотта сохранял свою справедливость, то газ при высоких давлениях должен был занять объём, равный суммарному объёму молекул. Кроме того, при низких температурах газы имеют свойство сжиматься и вообще переходить в твёрдое состояние, тут уж о соблюдении постоянства произведения давления на объём и речи быть не может.

3. Таким образом, основными причинами отклонения поведения газов от закона Бойля – Мариотта являются наличие у молекул собственного объёма и сил межмолекулярного взаимодействия. Взаимодействие между молекулами происходит на электрической основе, так как в простейшем случае одноатомная молекула состоит из положительно заряженного ядра и отрицательно заряженной электронной оболочки.

4. Для описания поведения газов в широком диапазоне температур и давлений было предложено много уравнений, однако самым простым и достаточно точным из всех, по мнению многих авторов, является уравнение, предложенное в 1873 г. нидерландским физиком Ван-дер-Ваальсом (1837 – 1923).

5. Уравнение Ван-дер-Ваальса учитывает взаимодействие между молекулами двумя способами. Во-первых, учитывается собственный объём молекул. Если обозначить объём всех молекул через b , то свободным останется объём

$$V_{\mu} = V_{\Sigma} - b,$$

где V_{Σ} – общий объём, предоставленный газу. Во-вторых, учитывается, что подлетающая к стенке молекула испытывает на себе притяжение остальных, которое уравновешивалось, во время нахождения молекулы внутри сосуда. Это притяжение эквивалентно дополнительному давлению p_i , которое называют внутренним давлением газа. Вместо внешнего давления Ван-дер-Ваальс включил в уравнение сумму давлений $(p + p_i)$. Внутреннее давление газа определяется концентрацией молекул, силы, возникающие при взаимодействии тоже пропорциональны концентрации, поэтому, для одного моля газа можно записать

$$p_i \sim n^2 \sim \frac{1}{V_{\mu}^2};$$

5. Если коэффициент пропорциональности обозначить через a , то уравнение состояния для одного моля реального газа примет вид

$$\left(p + \frac{a}{V_{\mu}^2} \right) (V_{\mu} - b) = RT;$$

$$\left(\frac{pV^2 + a}{V^2}\right)(V - b) = RT; \quad \left(\frac{pV_\mu^2 + a}{V_\mu^2}\right) = \frac{RT}{V_\mu^2 - b};$$

$$pV_\mu^2 = \frac{RTV_\mu^2}{V_\mu^2 - b} - a; \Rightarrow \quad = \frac{RT}{V_\mu - b} - \frac{a}{V_\mu^2}.$$

7. Преобразуем уравнение Ван-дер-Ваальса к виду кубического уравнения:

$$\begin{aligned} (pV_{\mu}^2)(V_{\mu} - b) &= RTV_{\mu}^2 - (V_{\mu}^2 - b)a; \\ pV^3 - pV^2b - RTV^2 + Va - ba &= 0; \\ V^3 - V^2b - \frac{RTV^2}{p} + \frac{Va}{p} - \frac{ba}{p} &= 0; \\ V_{\mu}^3 - \left(b + \frac{RT}{p}\right)V_{\mu}^2 + \frac{a}{p}V_{\mu} - \frac{ab}{p} &= 0. \end{aligned}$$

9. Характерной особенностью изотерм, соответствующих двум более низким температурам T_k и T_1 , является свойство исследуемого газа при одном и том же давлении занимать различный объём. Это, на первый взгляд, странное обстоятельство является основанием для очень серьёзных выводов о структуре и поведении вещества в различных условиях.

монотонно спадающей кривой. Изотерма T_k называется критической изотермой, которая имеет только одну точку перегиба К, которая тоже называется критической точкой. Соответствующее этой точке давление и объём так же называются критическими. Состояние вещества, характеризующееся параметрами (p_k, V_k, T_k) называется критическим состоянием.

36

12. Правая часть изотермы (АС) при уменьшении объёма газа в первом приближении близка к изотерме закона Бойля – Мариотта, поскольку поправки Ван-дер-Ваальса невелики и левая часть уравнения состояния близка к pV . При дальнейшем уменьшении объёма газа поведение его становится нетрадиционным. **На участке изотермы СL происходит конденсация, газ частично превращается в жидкость**, обладающую несравненно большей плотностью, отсюда и уменьшение объёма. В точке изотермы L практически большая часть газа конденсируется и далее жидкость слабо меняет свой объём. Точка М соответствует окончанию конденсации, весь насыщенный пар трансформируется в жидкость. Следует отметить, что кривая BCDLM не описывается уравнением Ван-дер-Ваальса, это состояние называется метастабильным, т.е. малоустойчивым.

13. Таким образом, при понижении давления в цилиндре (выдвигание поршня) пары воды могут конденсироваться, т.е. масса жидкости в цилиндре будет увеличиваться.

52. В вакууме закреплен горизонтальный цилиндр. В цилиндре находится 0,1 моль гелия, запертого поршнем. Поршень массой 90 г удерживается упорами и может скользить влево вдоль стенок цилиндра без трения. В поршень попадает пуля массой 10 г, летящая горизонтально со скоростью 400 м/с, и застревает в нём. Как изменится температура гелия в момент остановки поршня в крайнем левом положении? Считать, что за время движения поршня газ не успевает обменяться теплом с сосудом и поршнем.

Решение

1. Скорость поршня с застрявшей в нём пулей:

$$u = \frac{mv}{M+m} = \frac{1 \cdot 10^{-2} \cdot 400}{0,1} \approx 40 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Кинетическая энергия поршня с пулей при движении влево:

$$K = \frac{(M+m)u^2}{2};$$

3. Кинетическая энергия поршня при его перемещении вдоль горизонтального цилиндра трансформируется в изменение внутренней энергии гелия:

$$K = \Delta U_{1 \rightarrow 2};$$

$$K = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = 1,5 \nu R \Delta T;$$

$$\frac{m^2 v^2}{M+m} = 3 \nu R \Delta T; \Rightarrow \Delta T = \frac{m^2 v^2}{3(M+m) \nu R} = \frac{1 \cdot 10^{-4} \cdot 1,6 \cdot 10^5}{3 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 8,3} \approx 64,25 \text{ K};$$

53. В калориметр налито $m_1 = 2$ кг воды с температурой $T_1 = 278$ °K, и положен кусок льда массой $m_2 = 5$ кг, имеющий температуру $T_2 = 233$ °K. Определить установившуюся температуру Θ после наступления теплового равновесия.

Решение

1. Возможны четыре варианта развития событий:

- весь лёд растает, и температура станет равной $\Theta = 273$ °K;

- растает часть льда, температура будет $\Theta = 273 \text{ }^{\circ}\text{K}$;
- вся вода замёрзнет и температура смеси будет $\Theta < 273 \text{ }^{\circ}\text{K}$;
- замёрзнет только часть воды, $\Theta = 273 \text{ }^{\circ}\text{K}$.

2. При охлаждении воды до $\Theta = 273 \text{ }^{\circ}\text{K}$ вода отдаёт тепло в количестве:

$$Q_1 = c_1 m_1 (T_1 - \Theta) \cong 4200 \cdot 2 \cdot 5 \cong 4,2 \cdot 10^4 \text{ Дж};$$

3. При нагревании лёд поглотит тело в количестве:

$$Q_2 = c_2 m_2 (\Theta - T_1) \cong 2100 \cdot 5 \cdot 40 \cong 4,2 \cdot 10^5 \text{ Дж};$$

4. Поскольку $Q_2 > Q_1$, то возможны только случаи полного или частичного заморозания воды. Если замёрзнет вся вода, то

$$Q_3 = \lambda m_1 \cong 3,3 \cdot 10^5 \cdot 2 \cong 6,6 \cdot 10^5 \text{ Дж};$$

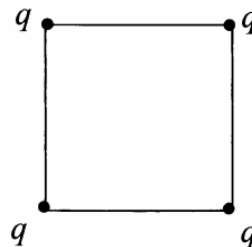
5. Поскольку $Q_1 + Q_3 > Q_2$, то тепловое равновесие отсутствует, т.е. в калориметре имеет место последний случай, когда температура установится на уровне $\Theta = 273 \text{ }^{\circ}\text{K}$ и лёд растает частично. Уравнение теплового баланса, соответствующее данной ситуации будет иметь вид:

$$c_1 m_1 (T_1 - \Theta) + m_x \lambda = c_2 m_2 (\Theta - T_1); \quad m_x = \frac{c_2 m_2 (\Theta - T_2) - c_1 m_1 (T_1 - \Theta)}{\lambda};$$

$$m_x = \frac{Q_2 - Q_1}{\lambda} \cong 1,145 \text{ кг};$$

Электродинамика

54. Четыре одинаковых заряда q расположены на плоскости в вершинах квадрата и удерживаются в равновесии связывающими их, не проводящими ток нитями (см. рисунок). Натяжение нитей $T = 2,7 \cdot 10^{-3}$ Н. Чему равна сила F_0 , действующая на каждый из зарядов со стороны другого ближайшего заряда?



Решение

1. Выделим заряд q_1 на который будут действовать три силы Кулона

$$\{\vec{F}_{1,2}; \vec{F}_{1,4}; \vec{F}_{1,3}\}$$

геометрическая сумма которых в проекции на вертикальную ось по модулю будет равна натяжению нити, связывающей заряды.

2. Введём, для упрощения записи, условные обозначения:

$$|\vec{F}_{1,2}| = |\vec{F}_{1,4}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q| \cdot |q|}{\ell^2} = f;$$

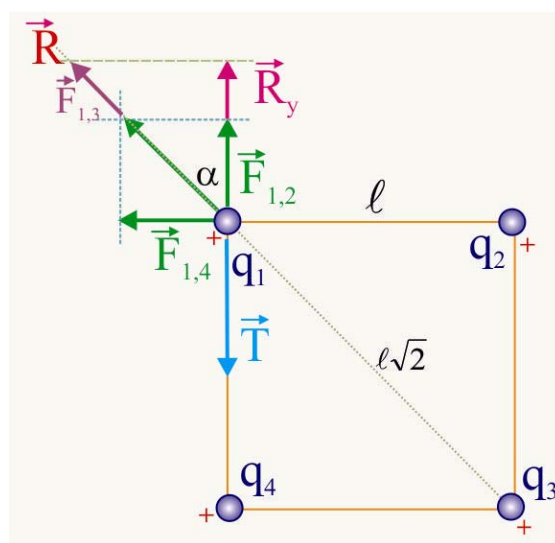
$$|\vec{F}_{1,3}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q| \cdot |q|}{(\sqrt{2}\ell)^2} = \frac{f}{2};$$

3. Модуль равнодействующей в этом случае определится как:

$$|\vec{R}| = \sqrt{f^2 + f^2} + \frac{f}{2} = f\sqrt{2} + \frac{f}{2} \approx 1,91f;$$

4. Модуль силы натяжения нити равен проекции равнодействующей на вертикальную ось:

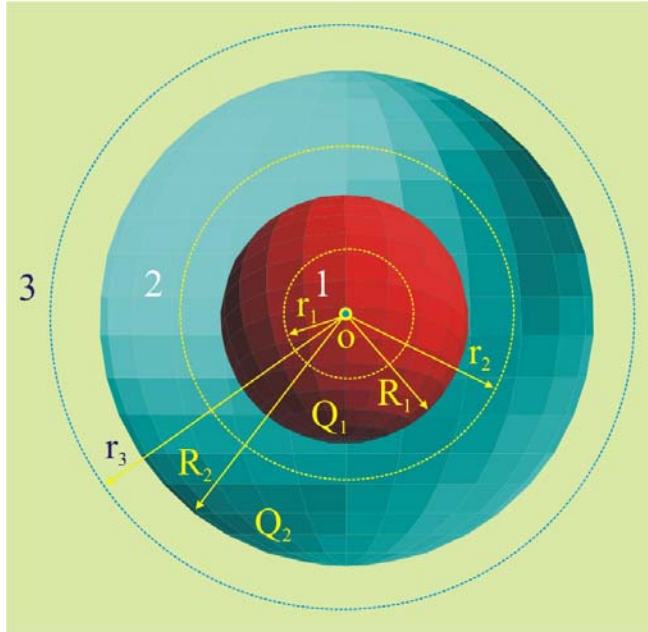
$$|\vec{T}| = 1,91f \cos 45^\circ; \Rightarrow f \approx \frac{2,7 \cdot 10^{-3}}{1,91 \cdot 0,707} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ Н};$$



55. Две концентрические проводящие сферы радиусами $R_1 = 10$ см и $R_2 = 20$ см заряжены разноимёнными зарядами $Q_1 = 1$ нКл и $Q_2 = -0,5$ нКл. Определить напряжённость электрического поля в точках, лежащих на расстоянии от центра $r_1 = 5$ см, $r_2 = 15$ см и $r_3 = 0,5$ м. На расстоянии $L = 2$ м от внешней сферы расположена квадратная пластина со стороной $a = 1$ см, ориентирована так, что поток вектора напряжённости электрического поля максимален. Найти величину этого потока.

Решение

1. Выделим три области пространства $\{1, 2, 3\}$ в которых необходимо определить напряжённость электрического поля.



2. Для определения напряжённости в области 1 воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса: выделим мысленно сферическую область радиуса r_1 . Зарядов внутри этой области нет, поэтому

$$\oint_s E_n ds = 0,$$

из чего следует ввиду сферической симметрии поля

$$E_n = E_1 = E_1 \oint_s ds = 0, \quad (s \neq 0).$$

Таким образом, внутри сферы радиуса r_1 электрическое поле будет отсутствовать, потому что данная замкнутая поверхность внутри себя не содержит зарядов

3. Для определения параметров поля в пространстве между заряженными сферами проведём вторую мысленную сферическую поверхность радиусом r_2 , внутри которой будет находиться заряд Q_1 . Теорема Остроградского – Гаусса в этом случае запишется следующим образом

$$\oint_s E_n ds = \frac{Q_1}{\epsilon_0}.$$

4. При сферической симметрии поля $\vec{E}_2 = \vec{E}_n$, поэтому уравнение упростится

$$E_2 \oint_s ds = \frac{Q_1}{\epsilon_0}, \Rightarrow E_2 = \frac{Q_1}{\epsilon_0 s_1} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2},$$

$$E_2 \cong 9 \cdot 10^9 \frac{1 \cdot 10^{-9}}{0,025} \cong 360 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

5. В области 3 поле будет представлять собой суперпозицию полей двух заряженных сфер

$$\oint_s E_n ds = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0}, \Rightarrow E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi r_3^2 \epsilon_0}.$$

$$E_3 \cong 9 \cdot 10^9 \frac{(1 - 0,5) \cdot 10^{-9}}{0,25} = 18 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

6. Поскольку в условии задачи речь идёт о максимальной величине потока вектора напряжённости электрического поля через заданную площадку, то это значит, что

$$\Phi_E = \oint_s E_3 ds,$$

где E_3 – напряжённость поля на расстоянии L от поверхности внешней сферы.

7. Определим модуль напряжённости поля E_3

$$\oint_s E_3 ds = \frac{Q_1 + Q_2}{\epsilon_0}, \Rightarrow E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi(R_2 + L)^2 \epsilon_0}.$$

$$E_3 \cong 9 \cdot 10^9 \frac{(1 - 0,5) \cdot 10^{-9}}{(2,2)^2} \cong 1 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

8. Подставим значение E_3 в уравнение потока

$$\Phi_E = E_3 s \cong 1 \cdot 12,56 \cdot 5 \cong 61 \text{ В} \cdot \text{м}.$$

56. Полый металлический шарик массой 2 г подвешен на шелковой нити и помещен над положительно заряженной плоскостью, создающей однородное вертикальное электрическое поле напряженностью 10^6 В/м. Шарик имеет положительный заряд 10 нКл. Период малых колебаний шарика 1 с. Какова длина нити?

Решение

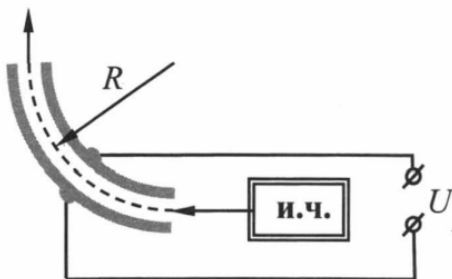
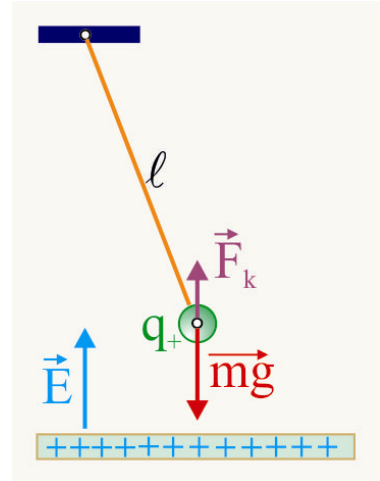
1. На положительно заряженный шарик, который одновременно является грузом математического маятника, действуют две силы: сила тяжести и сила Кулона, т.к. колебания происходят в однородном электрическом поле. В этой связи изменится величина ускорения, действующего на шарик.

2. Ускорение определим из второго закона Ньютона в проекции на вертикальную ось:

$$mg - qE = ma; \Rightarrow a = g - \frac{qE}{m};$$

3. Длину подвеса математического маятника выразим из уравнения периода:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{a}}; \Rightarrow \ell = \frac{T^2 a}{4\pi^2} = \frac{T^2 \left(g - \frac{qE}{m}\right)}{4\pi^2} \approx 0,126 \text{ м};$$



57. На рисунке показана схема устройства для предварительного отбора заряженных частиц с целью последующего детального исследования. Устройство представляет собой конденсатор, пластины которого изогнуты дугой радиуса $R \approx 50$ см. Предположим, что в промежуток между обкладками конденсатора из источника заряженных частиц (и. ч.) влетают, как показано на рисунке, ионы с зарядом e . Напряжённость электрического поля в конденсаторе по модулю равна 50 кВ/м. При каком значении кинетической энергии ионы пролетят сквозь конденсатор, не коснувшись его пластин? Считать, что расстояние между обкладками конденсатора мало, напряжённость электрического поля в конденсаторе всюду одинакова по модулю, а вне конденсатора электрическое поле отсутствует. Влиянием силы тяжести пренебречь.

Решение

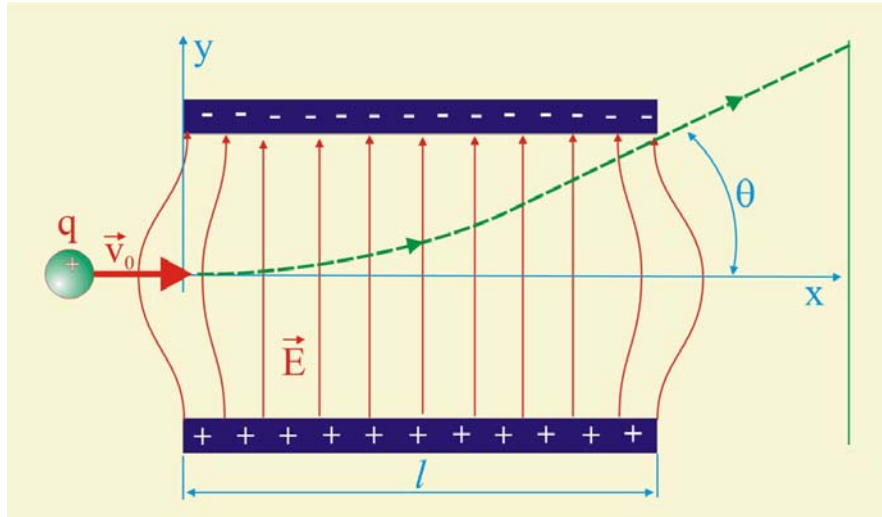
1. Пусть частица массой m , несущая положительный заряд q , двигаясь с постоянной скоростью v_0 , попадает в пространство между пластинами воздушного конденсатора с напряжённостью E . В данном случае уравнение движения частицы примет следующий вид:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}.$$

2. Если оси координат выбрать так, как показано на рис., то проекции вектора напряжённости будут равны: $E_x = E_z = 0$, $E_y = E$, следовательно Сила Кулона, действующая на положительно заряженную частицу будет направлена вертикально вверх.

Это даёт основание записать векторное уравнение в виде системы двух скалярных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= 0, \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{q}{m} E. \end{aligned} \right\}$$



3. Решаемая задача движения аналогична задаче о горизонтальном броске тела в поле земного тяготения, что позволяет предположить, что частица будет двигаться по параболической траектории. Интегрирование системы уравнений второго закона Ньютона приводит к результату:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \text{const} = v_0; \\ v_y &= \frac{q}{m} Et + C. \end{aligned} \right\}$$

4. В данном случае $t = \ell/v_0$ – время пребывания частицы в электрическом поле, C – постоянная интегрирования. В момент времени $t=0$ $v_y = 0$, следовательно $C = 0$, поэтому:

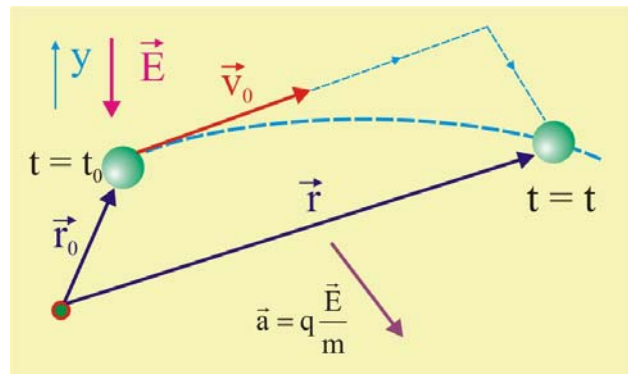
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{q}{m} E \frac{\ell}{v_0}.$$

5. Угол отклонения частицы θ при её выходе из электрического поля определится как

$$\text{tg}\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{q}{m} \frac{\ell E}{v_0^2}.$$

6. Как видно из полученного уравнения, угол отклонения θ зависит от удельного заряда частицы q/m , чем и воспользовался Дж. Дж. Томсон при определении удельного заряда электрона.

7. Выберем систему координат таким образом, чтобы направление поля совпадало с направлением отрицательной оси y . В начальный момент



времени $t = t_0$ начинает двигаться из точки с радиус-вектором $\vec{r}_0$, имея начальную скорость $\vec{v}_0$. Уравнения движения в этом случае можно записать следующим образом

$$\begin{aligned}\vec{a} &= q \frac{\vec{E}}{m}, \\ \vec{v} &= q \frac{\vec{E}}{m} t + \vec{v}_0, \\ \vec{r} &= \frac{1}{2} q \frac{\vec{E}}{m} t^2 + \vec{v}_0 t.\end{aligned}$$

8. Эти уравнения разлагаются на компоненты в виде проекций на оси декартовой системы координат

$$\left. \begin{aligned}a_x &= 0; \\ a_y &= -q \frac{E}{m}; \\ v_x &= v_{x(0)}; \\ v_y &= -q \frac{E}{m} t + v_{y(0)}; \\ x &= v_{x(0)} t; \\ y &= -\frac{1}{2} \frac{q}{m} E t^2 + v_{y(0)} t.\end{aligned} \right\}$$

9. Уравнения системы позволяют вычислять все кинематические параметры движения. В частности, уравнение траектории можно получить, исключая время из двух последних уравнений системы путём подстановки $t = x/v_{x(0)}$

$$y = -\frac{1}{2} \frac{q}{m} \frac{E x^2}{v_{x(0)}^2} + \frac{v_{y(0)}}{v_{x(0)}} x,$$

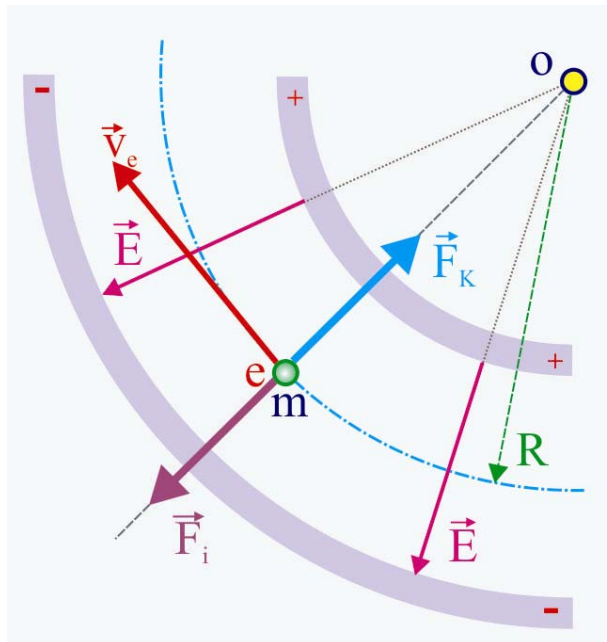
что подтверждает предположение о криволинейной форме траектории. Рассмотрим далее несколько частных случаев движения.

10. Если электростатическое поле будет создавать электродами в виде двух concentрических окружностей, то вектор напряжённости $\vec{E}$ будет иметь радиальное направление и заряженная частица будет двигаться по круговой траектории с нормальным ускорением $\vec{a}_n$, условие нахождения отрицательно заряженной частицы (иона, несущего заряд электрона) на части стационарной круговой траектории представится следующим образом:

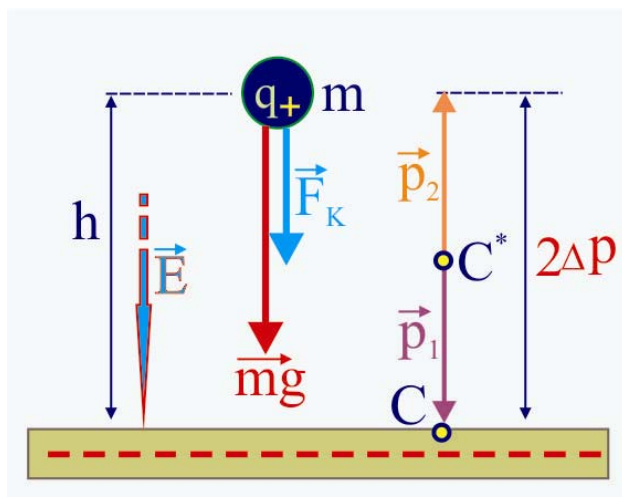
$$\frac{mv_e^2}{R} = eE; \quad mv_e^2 = eER;$$

11. Кинетическая энергия иона, обеспечивающая его стационарное движение по части круговой орбиты:

$$K_e = \frac{mv_e^2}{2} = \frac{eER}{2} \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 0,5}{2} \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ Дж};$$



58. Отрицательно заряженная пластина, создающая вертикально направленное однородное электрическое поле напряженностью $E = 10^4$ В/м, укреплена на горизонтальной плоскости. На нее с высоты $h = 10$ см падает шарик массой $m = 20$ г, имеющий положительный заряд $q = 10^{-5}$ Кл. Какой импульс шарик передаст пластине при абсолютно упругом ударе?



Решение

1. Заряженный шарик в электростатическом поле, созданном заряженной плитой будет падать с ускорением, отличным от ускорения свободного падения, из второго закона Ньютона:

$$g + \frac{qE}{m} = a \approx 15 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

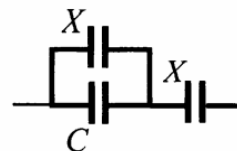
2. Скорость шарика в момент касания плиты:

$$mah = \frac{mv^2}{2}; \quad v = \sqrt{2ah};$$

3. Импульс, переданный шариком плите при абсолютно неупругом взаимодействии

$$|\Delta \vec{p}| = 2mv = m\sqrt{8ah} \approx 2 \cdot 10^{-2} \sqrt{8 \cdot 15 \cdot 0,1} \approx 0,07 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}};$$

59. К конденсатору, электрическая емкость которого $C = 16$ пФ, подключают два одинаковых конденсатора емкостью X : один – параллельно, а второй – последовательно (см. рисунок). Емкость образовавшейся батареи конденсаторов равна емкости C . Какова емкость X ?



Решение

1. Общая ёмкость трёх, смешанно соединённых конденсаторов:

$$C = \frac{X(C+X)}{C+2X}; \Rightarrow X^2 - CX - C^2 = 0; \quad X = \frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} + C^2} = 1,62C = 25,88 \text{ пФ};$$

60. Конденсатор, электрическая емкость которого $C_1 = 5$ мкФ, заряжен так, что разность потенциалов между его пластинами $U_1 = 120$ В. Второй конденсатор, электрическая емкость которого $C_2 = 7$ мкФ, имеет разность потенциалов между пластинами $U_2 = 240$ В. Одноименно заряженные пластины конденсаторов попарно соединили проводниками. Каков модуль разности потенциалов U между пластинами каждого конденсатора?

Решение

1. Так как соединяются одноимённые пластины конденсаторов, то в соответствии с законом сохранения энергии:

$$W_1 + W_2 = W_{\Sigma}; \quad C_1 U_1^2 + C_2 U_2^2 = C_{\Sigma} U_{\Sigma}^2;$$

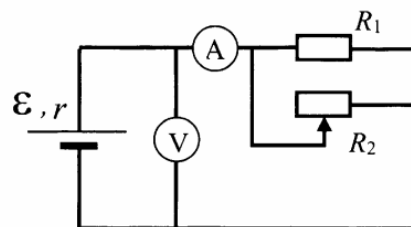
2. Электрическая ёмкость 2 параллельных конденсаторов:

$$C_{\Sigma} = C_1 + C_2;$$

1. При параллельном соединении разность потенциалов на обкладках конденсаторов будет одинаковой:

$$U_{\Sigma} = \sqrt{\frac{C_1 U_1^2 + C_2 U_2^2}{C_1 + C_2}} = \sqrt{\frac{(5 \cdot 10^{-6} \cdot 120^2 + 7 \cdot 10^{-6} \cdot 240^2)}{12 \cdot 10^{-6}}} \approx 198 \text{ В};$$

61. На рисунке показана принципиальная схема электрической цепи, состоящей из источника тока с отличным от нуля внутренним сопротивлением, резистора, реостата и измерительных приборов – идеального амперметра и идеального вольтметра. Используя законы постоянного тока, проанализируйте эту схему и выясните, как будут изменяться показания приборов при перемещении движка реостата *вправо*.



Решение

1. Внешнее сопротивление цепи:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$$

откуда видно, что при перемещении движка реостата вправо при уменьшении его активной длины проводника с высоким удельным сопротивлением ρ

$$R_2 \approx \frac{\rho \ell}{S}$$

внешнее сопротивление R так же будет уменьшаться.

2. В соответствии с законом Ома для замкнутой (полной) цепи:

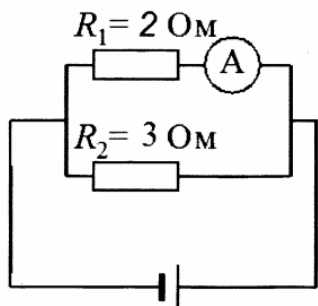
$$I = \frac{\varepsilon}{r + R}$$

при уменьшении сопротивления резистора R_2 **сила тока в цепи увеличится.**

2. Если внутренне сопротивление источника тока меньше внешнего сопротивления $r < R$, то с учётом традиционного параллельного подключения идеального вольтметра, согласно закону Ома для участка цепи:

$$\varepsilon = Ir + IR; \quad IR = U_R = \varepsilon - Ir,$$

показания вольтметра будут уменьшаться.



62. В цепь, изображённую на рисунке включен источник с внутренним сопротивлением 0,67 Ома. Идеальный амперметр показывает 2 А.

Определите по этим данным ЭДС источника

Решение

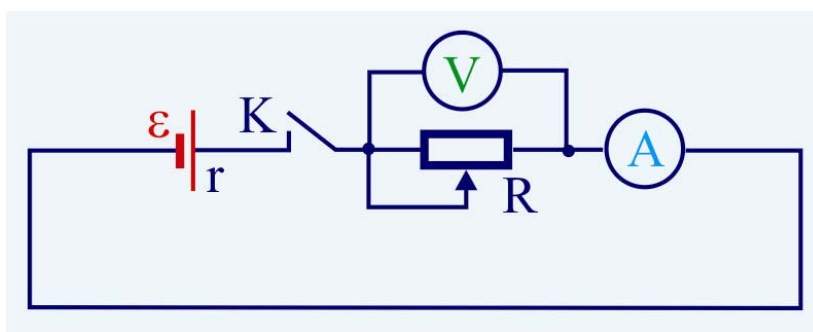
1. Падение напряжения на внешнем сопротивлении (резисторы включены параллельно)

$$\left. \begin{aligned} U_R &= I_1 R_1; \\ U_R &= I_2 R_2; \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_2 = \frac{I_1 R_1}{R_2} \approx 1,33 \text{ A}; \quad I = I_1 + I_2 \approx 3,33 \text{ A};$$

2. Закон Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}; \Rightarrow \varepsilon = I \left(r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) \approx 6,2 \text{ В};$$

63. В цепь последовательно соединены гальванический элемент, ключ, переменный резистор и амперметр. Параллельно резистору подключен вольтметр. При двух положениях ручки переменного резистора сила тока оказалась равной 0,9 А и 3 А, при этом вольтметр показывал напряжение 3,6 В и 1,5 В, соответственно. Какая максимальная мощность может выделяться на переменном резисторе в этой цепи?



Решение

Рассмотрим источник тока с заданной величиной ЭДС ε и внутренним сопротивлением r нагруженный на внешнее сопротивление R . На внешнем сопротивлении будет выделяться активная электрическая мощность N_a

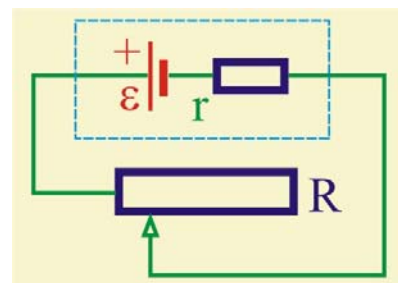
$$N_a = UI = I^2 R = \varepsilon^2 \frac{R}{(R + r)^2}.$$

2. Для выяснения величины максимально возможной активной мощности $N_{a(\max)}$ будем изменять величину внешнего сопротивления до величины R_m . Математически это означает определение экстремума функции $N_a = f(R)$ путём её дифференцирования по сопротивлению и приравнивания производной к нулю, стандартная процедура нахождения экстремума функции

$$\frac{dN_a}{dR} = \varepsilon^2 \frac{r^2 - R_m^2}{(r + R_m)^4} = 0.$$

Зю Так как R и r всегда положительные величины, то условие выполняется при $r = R_m$. Мощность, выделяемая во внешней цепи, достигает возможно большего значения при равенстве внутреннего сопротивления источника тока и внешнего сопротивления. Сила тока в этом режиме составит:

$$I = \frac{\varepsilon}{2r}.$$



Переменная нагрузка

4. Максимально возможная сила тока в цепи будет иметь место при $R = 0$, т.е. в режиме короткого замыкания клемм источника тока

$$I_{\max} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

5. Наибольшее значение активной мощности при этом составит:

$$N_{a(\max)} = \frac{\varepsilon^2}{4r}.$$

6. Как видно из полученных выше уравнений часть мощности источника рассеивается на его внутреннем сопротивлении. Естественно, что при $r = 0$ (идеальный источник тока) такой ситуации не возникает. Для реальных же источников целесообразно ввести, исходя из «не производственных» потерь, понятие коэффициента полезного действия. Если мощность, рассеиваемую на самом источнике определить как

$$N_i = rI^2,$$

то полная мощность будет равна

$$N = RI^2 + rI^2 = \varepsilon I.$$

7. Коэффициент полезного действия источника тока при такой постановке вопроса определится традиционно

$$\eta = \frac{N_A}{N} = \frac{U}{\varepsilon}.$$

8. Очевидно, что при $r \neq 0$ КПД источника будет всегда меньше единицы. Коэффициент полезного действия источника тока зависит от величины внутреннего и внешнего сопротивлений, его величину можно записать следующим образом

$$\eta = \frac{RI}{(R+r)I} = \frac{R}{R+r}.$$

9. Более строгий вывод уравнения максимальной мощности делается на основе анализа энергетических соотношений. Рассмотрим условия работы источника тока, замкнутого на внешнее сопротивление. Ток в цепи определяется законом Ома:

$$I\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{R+r}.$$

10. Мощность, выделяющаяся на нагрузке, считается полезной

$$N_A = I^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}.$$

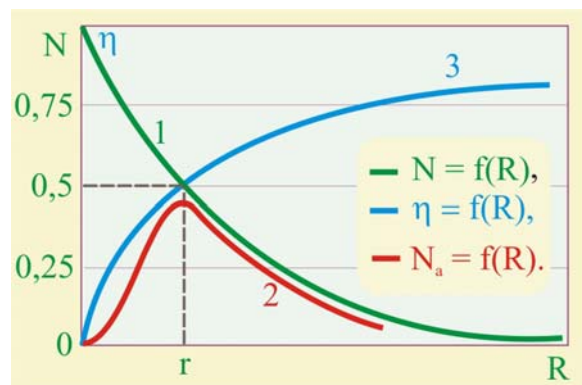
11. Полная мощность, выделяемая источником

$$N = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)}.$$

12. Коэффициент полезного действия источника тока определяется в виде отношения полезной мощности к полной мощности, т.е.

$$\eta = \frac{N_A}{N} = \frac{R}{(R+r)},$$

что подтверждает сделанные ранее предположения. Из уравнения очевидно, что величина η определяется исключительно соотношением между внешним сопротивлением и внутренним сопротивлением. На рис. приведена зависимость полной мощности (кривая 1), полезной мощности (кривая 2) и ко-



Параметры источника тока

эфициента полезного действия (кривая 3) в функции величины внешнего сопротивления. Полная мощность и сила тока имеют максимальное значение при $R = 0$, т.е. в режиме короткого замыкания. При этом равны нулю полезная мощность и коэффициент полезного действия. При $R = r$ полная мощность и ток равны половине своих максимальных значений. Коэффициент полезного действия источника равен 0,5. Полезная мощность (кривая 2) достигает своего максимального значения.

13. Для реализации уравнения максимально возможной мощности необходимо определить ЭДС источника и его внутреннее сопротивление.

14. По заданным показаниям приборов:

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{3,6}{0,9} = 4 \text{ Ом}; \quad R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{1,5}{3} = 0,5 \text{ Ом};$$

15. По закону Ома для полной цепи:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{\varepsilon}{r + R_1}; \\ I_2 &= \frac{\varepsilon}{r + R_2}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \varepsilon &= I_1(r + R_1); \\ I_2 &= \frac{I_1(r + R_1)}{r + R_2}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 r + I_2 R_2 = I_1 r + I_1 R_1; \quad r(I_2 - I_1) = I_1 R_1 - I_2 R_2;$$

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1} = \frac{0,9 \cdot 4 - 3 \cdot 0,5}{2,1} = 1 \text{ Ом};$$

$$\varepsilon = I_2(r + R_2) = 3(1 + 0,5) = 4,5 \text{ В};$$

16. Максимальное значение активной мощности на нагрузке:

$$N_{a(\max)} = \frac{\varepsilon^2}{4r} \approx \frac{20,2}{4} \approx 5 \text{ Вт};$$

64. Конденсаторы, электрическая емкость которых 2 мкФ и 10 мкФ, заряжают до напряжения 5 В каждый, а затем «плюс» одного из них подключают к «минусу» другого и соединяют свободные выводы резистором 1000 Ом. Какое количество теплоты выделится в резисторе?

Решение

1. Энергия и заряд конденсаторов до их соединения:

$$W_1 = \frac{C_1 U^2}{2}; \quad W_2 = \frac{C_2 U^2}{2}; \quad q_1 = C_1 U; \quad q_2 = C_2 U;$$

2. Заряд и энергия конденсаторов после их соединения:

$$q_0 = (q_2 - q_1) = U(C_2 - C_1);$$

$$W_0 = \frac{(q_2 - q_1)^2}{2(C_1 + C_2)} = \frac{U^2(C_2 - C_1)^2}{2(C_1 + C_2)};$$

3. Изменение энергии конденсаторов при перезарядке равно выделившейся энергии:

$$\Delta W = W_1 + W_2 - W_0 = \frac{C_1 U^2}{2} + \frac{C_2 U^2}{2} - \frac{U^2(C_2 - C_1)^2}{2(C_1 + C_2)};$$

$$\Delta W = \frac{U^2(C_2 + C_1)}{2} - \frac{U^2(C_2 - C_1)^2}{2(C_1 + C_2)} = \frac{2U^2 C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{50 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-5}}{1,2 \cdot 10^{-5}} \approx 83,3 \text{ мкДж};$$

65. Конденсатор, электрическая емкость которого 1000 мкФ, заряжают до напряжения 50 В, к его выводам подключают цепочку из трех резисторов 100 Ом, 200 Ом и 400 Ом, соединенных параллельно. Какое количество теплоты выделится в резисторе 200 Ом?

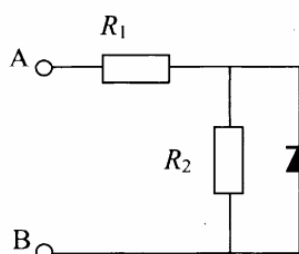
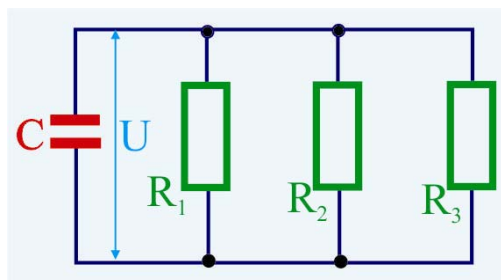
Решение

1. В исходном состоянии энергия, запасенная в конденсаторе:

$$W = \frac{CU^2}{2};$$

2. Если меньший резистор с сопротивлением R_1 принять за условную единицу потребления энергии, то всего к конденсатору подключается 7 условных потребителей, причём на втором резисторе выделится энергия:

$$W_2 = \frac{2W}{7} = \frac{2CU^2}{14} \approx \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2500}{14} \approx 0,357 \text{ Дж};$$



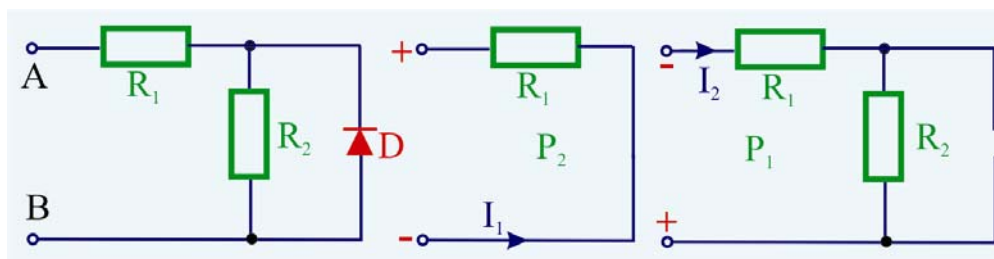
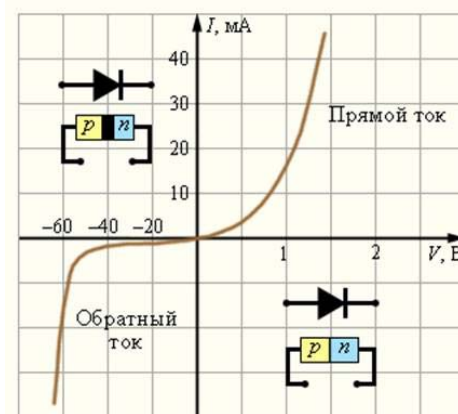
66. В цепи, изображённой на рисунке, сопротивление диода в прямом направлении пренебрежимо мало, а в обратном – многократно превышает сопротивление резисторов. При подключении к точке А – положительного, а к точке В – отрицательного полюса батареи с ЭДС 12 В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, потребляемая мощность равна 4,8 Вт. При изменении полярности подключения батареи потребляемая мощность оказалась равной 14,4 Вт. Укажите условия протекания тока через диод и резисторы в обоих случаях и определите сопротивление резисторов в этой цепи.

Решение

1. Как видно из хода вольтамперной характеристики полупроводникового диода, он обладает малым сопротивлением прямому току и значительным сопротивлением обратному току, это позволяет заданную схему представить в двух вариантах, в зависимости от полярности подключения источника ЭДС.

2. Мощность, рассеиваемую на резисторах можно представить как:

$$P = \frac{\varepsilon^2}{R};$$



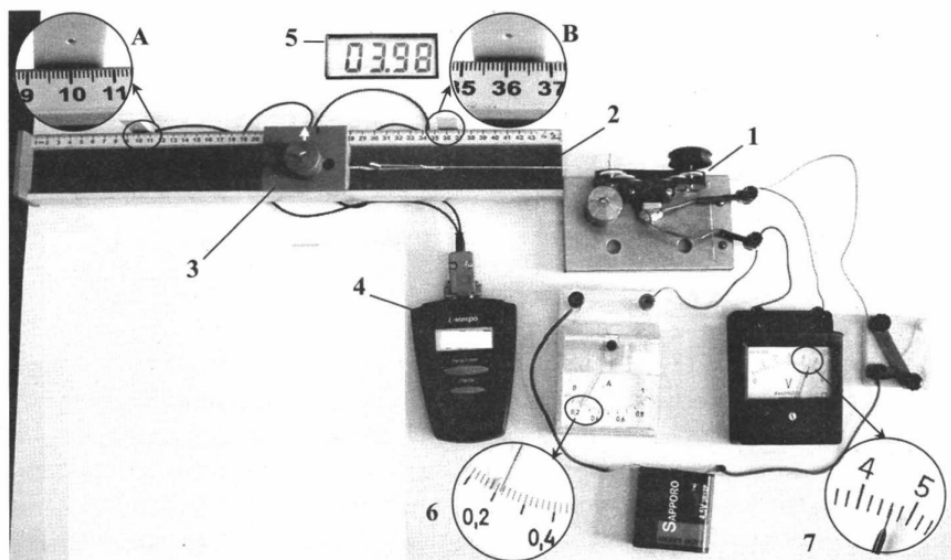
3. Максимальная мощность P_2 будет иметь место когда диод открыт, обладает малым сопротивлением (как бы "перемыкает" сопротивление R_2):

$$P_2 = \frac{\varepsilon^2}{R_1}; \Rightarrow R_1 = - = \frac{144}{14,4} = 10 \text{ Ом};$$

4. При смене полярности подключения источника тока, диод закрывается и, практически представляет собой разрыв цепи, ток протекает по обоим сопротивлениям

$$P_2 = \frac{\varepsilon^2}{R_1 + R_2}; \Rightarrow R_2 = \frac{\varepsilon^2}{P_2} - R_1 = \frac{144}{4,8} - 10 = 20 \text{ Ом};$$

67. На фотографии представлена установка, в которой электродвигатель (1) с помощью нити (2) равномерно перемещает каретку (3) вдоль направляющей горизонтальной линейки. При прохождении каретки мимо датчика А секундомер (4) включается, а при прохождении каретки мимо датчика В секундомер выключается.



После измерения силы тока (6), напряжения (7) и времени (дисплей 5) ученик с помощью динамометра измерил силу трения скольжения каретки по направляющей. Она оказалась равной 0,4 Н. Рассчитайте отношение α работы силы упругости нити к работе электрического тока во внешней цепи.

Решение

1. Перечислим условия опыта по показаниям измерительных инструментов:

- Перемещение каретки $\ell \approx 0,26 \text{ м};$
- Время перемещения каретки $\tau \approx 3,98 \text{ с};$
- Сила тока через обмотку электромотора $I \approx 0,2 \text{ А};$
- Напряжение на обмотке электромотора $U \approx 4,6 \text{ В};$

2. Модуль работы силы трения:

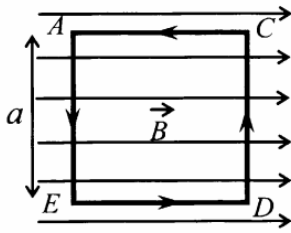
$$|A(\vec{F}_{\text{тр}})| = F_{\text{тр}} \cdot \ell;$$

3. Работа электрического тока во внешней цепи:

$$\Theta = IU\tau;$$

4. Отношение работ:

$$\alpha = \frac{|A(\vec{F}_{\text{Тр}})|}{\Theta} = \frac{0,4 \cdot 0,26}{0,2 \cdot 4,6 \cdot 3,98} \approx 0,0284; \quad \alpha \approx 3\%;$$



68. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит жёсткая рамка массой m из однородной тонкой проволоки, согнутая в виде квадрата $ACDE$ со стороной a (см. рисунок). Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, вектор индукции $\vec{B}$ которого перпендикулярен сторонам AE и CD и равен по модулю B . По рамке течёт ток в направлении, указанном стрелками (см. рисунок).

При какой минимальной силе тока рамка начнет поворачиваться вокруг стороны CD ?

Решение

1. Ампер и его многочисленные последователи опытным путём установили, что на проводники с током действуют механические силы, вызванные наличием магнитного поля. Это действие можно описать количественно. Если поперечное сечение проводника S , а его длина в направлении тока l , то электрический заряд, сосредоточенный в элементарном объёме $dV = Sdl$, будет определяться количеством сосредоточенных в нём носителей заряда, в частности – электронов

$$dN = n dV = n S d\ell,$$

суммарный электрический заряд которых определится как

$$dQ = q dN = q n S d\ell$$

где q – заряд носителя, n – концентрация носителей. Силу, действующую на кристаллической решётки в рассматриваемом элементе проводника, можно определить из условий равновесия электрических и магнитных сил

$$quB = qE, \Rightarrow E = Bu.$$

2. Выразим дрейфовую скорость носителей заряда через плотность тока, текущего по проводнику

$$u = \frac{j}{qn}, \quad E = \frac{Bj}{qn}.$$

3. Искомую элементарную силу, таким образом можно представить следующим образом

$$dF_A = EdQ = \frac{B}{qn} j \cdot qn S d\ell = IB d\ell.$$

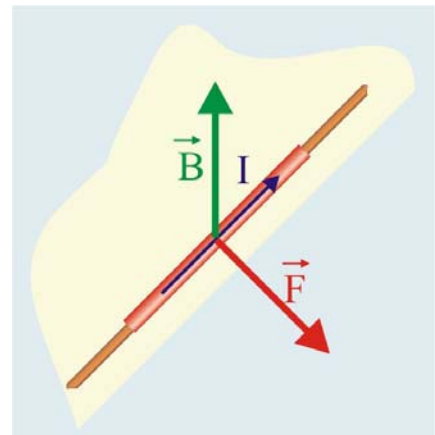
4. В векторной форме сила, действующая на элементарную длину проводника $d\vec{\ell}$, по которому течёт ток величиной I , определится векторным соотношением

$$d\vec{F}_A = I(d\vec{\ell} \times \vec{B}).$$

В случае прямолинейного проводника магнитная индукция во всех точках пространства вдоль всей его длины l магнитная индукция будет постоянной, т.е.

$$\vec{F}_A = I(\vec{\ell} \times \vec{B}),$$

или, в соответствии с определением векторного произведения:



Действие магнитного поля на проводник с током

$$F_A = I\ell B \sin(\vec{\ell} \times \vec{B}).$$

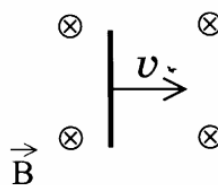
5. Очевидно, что вектор действующей силы будет перпендикулярен плоскости, в которой располагаются векторы $\vec{\ell}$ и $\vec{B}$. На рамку с током ACDE, расположенную в магнитном поле, таким образом, будет действовать пара сил Ампера, которые обуславливают возникновение механического момента. Относительно оси Z, совпадающей со стороной рамки DC момент определится как:

$$|M_Z(\vec{F}_A)| = F_A a = I a^2 B;$$

6. Вращение рамки относительно оси Z станет возможным при условии:

$$M_Z(\vec{F}_A) \geq M_Z(m\vec{g}); \quad I a^2 B \geq mg \frac{a}{2}; \quad \Rightarrow \quad I \geq \frac{mg}{2aB};$$

69. Горизонтально расположенный проводник длиной 1 м движется равноускоренно в вертикальном однородном магнитном поле, индукция которого направлена перпендикулярно проводнику и скорости его движения (см. рисунок). При начальной скорости проводника, равной нулю, и ускорении 8 м/с^2 , он переместился на 1 м. Какова индукция магнитного поля, в котором двигался проводник, если ЭДС индукции на концах проводника в конце движения равна 2 В?



Решение

1. В соответствии с законом электромагнитной индукции Майкла Фарадея:

$$|\varepsilon_i| = \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = B \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{B \ell \Delta x}{\Delta t};$$

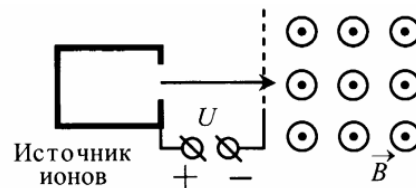
2. Время перемещения проводника:

$$\Delta x = \frac{a \Delta t^2}{2}; \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2 \Delta x}{a}} = 0,25 \text{ с};$$

3. Индукция магнитного поля, при которой возможно такое движение:

$$B = \frac{\varepsilon_i \Delta t}{\ell \Delta x} = \frac{2 \cdot 0,25}{1} = 0,5 \text{ Тл};$$

70. Ион ускоряется в электрическом поле с разностью потенциалов $U = 10 \text{ кВ}$ и попадает в однородное магнитное поле перпендикулярно к вектору его индукции $\vec{B}$ (см. рисунок). Радиус траектории движения иона в магнитном поле $R = 0,2 \text{ м}$, модуль индукции магнитного поля равен $0,5 \text{ Тл}$.



Определите отношение массы иона к его электрическому заряду $\frac{m}{q}$. Кинетической энергией иона при его вылете из источника пренебрегите.

Решение

1. Скорость иона при входе в область пространства, занятого магнитным полем:

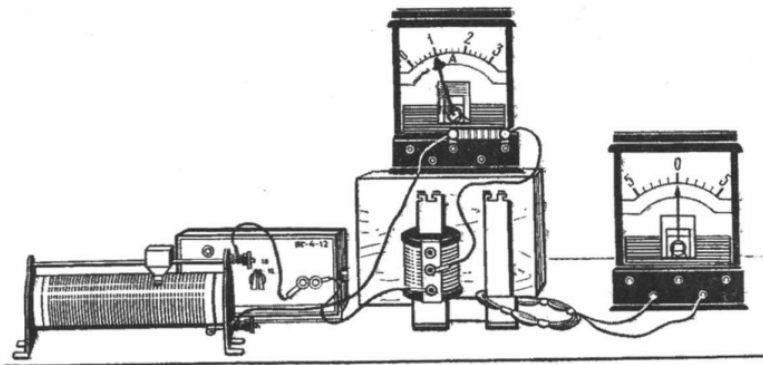
$$\frac{mv^2}{2} = qU; \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}; \quad \frac{m}{q} = \zeta; \quad v = \sqrt{\frac{2U}{\zeta}};$$

2. Условие нахождения иона на стационарной круговой орбите в однородном магнитном поле:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB; \quad \frac{m}{q} = \zeta = \frac{RB}{v}; \quad \zeta = \frac{RB}{\sqrt{\frac{2U}{\zeta}}}; \quad \zeta^2 = \frac{R^2 B^2 \zeta}{2U};$$

$$\zeta = \frac{R^2 B^2}{2U} = \frac{0,04 \cdot 0,25}{2 \cdot 10^4} = 5 \cdot 10^{-7} \frac{\text{кг}}{\text{Кл}};$$

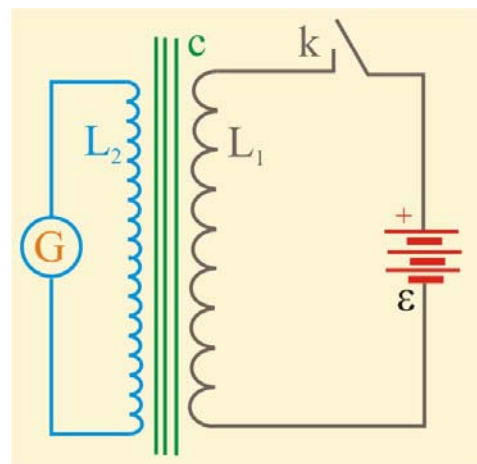
71. На рисунке изображены две изолированные друг от друга электрические цепи. Первая содержит последовательно соединенные источник тока, реостат, катушку индуктивности и амперметр, а вторая – проволоочный моток, к концам которого присоединен гальванометр, изображенный на рисунке справа. Катушка и моток надеты на железный сердечник.



Как будут изменяться показания приборов, если катушку, присоединенную к источнику тока, плавно перемещая вверх, снять с сердечника? Ответ поясните, указав, какие физические закономерности вы использовали для объяснения.

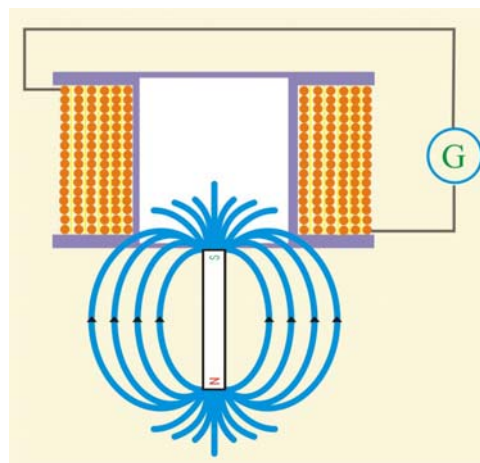
Решение

1. Майкл Фарадей, ознакомившись с работами Ампера и его последователей, пришёл к идее обратимости процессов при взаимодействии магнитного поля и электрического тока. В 1831 г. он увлёкся идеей получения электрического тока посредством магнитного поля. Первые эксперименты были просты и оригинальны. На стальной сердечник c были намотаны две катушки L_1 и L_2 , причём первая катушка была подключена к источнику тока ε . В цепь второй катушки был включён гальванометр. Фарадей менял материал проводников, их форму, количество витков, однако гальванометр перемещение



Первые опыты М. Фарадея

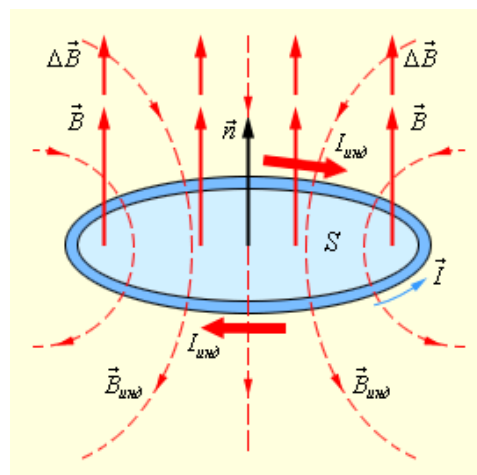
электрических зарядов не фиксировал. Многочисленные изменения конструкции не приносили результатов. В один из дней лабораторных испытаний ассистент Фарадея заметил, что стрелка гальванометра ощутимо дернулась при выключении установки переключателем k . Подключая и отключая катушку L_1 к источнику тока, экспериментаторы обнаружили броски стрелки. Стало ясно что Во втором контуре, замкнутом на гальванометр ЭДС возникает только в моменты времени, когда магнитная индукция исходного поля либо возрастает, либо уменьшается.



Магнит, вдвигаемый в катушку

2. Проверка обнаруженной закономерности была проверена при вдвигании и выдвигании постоянного магнита внутрь многовитковой катушки, замкнутой на гальванометр. Перемещение магнита сопровождалось возбуждением тока в катушке, который получил название индукционного.

3. Зафиксированные экспериментально факты индуцирования ЭДС Фарадей объяснил исходя из следующих предпосылок. Если магнитное поле изображать посредством линий индукции, то одной из характеристик будет густота линий. Пусть некоторый замкнутый контур, для простоты изображения круговой, движется в магнитном поле, переходя в пространство с большей густотой линий магнитной индукции. Магнитное поле имеет вихревой характер, т.е. линии магнитной индукции замкнуты, они не имеют начал и концов. Линии индукции сцеплены с контуром, поэтому пересечение этих линий должно сопровождаться пересечением плоскости контура этих линий. Если проводник находится в покое, то переменный характер должно иметь магнитное поле. В этой связи Фарадей заключил, что индукционный ток возникает в проводнике только в том случае, если проводник или какая либо его часть пересекает линии магнитной индукции.



Замкнутый контур в магнитном поле

4. Эмилий Христофорович Ленц применяя к явлению электромагнитной индукции закон сохранения энергии сформулировал следующее правило в соответствии с которым возникающий в проводнике индукционный ток $I_{\text{инд}}$ приводит к возникновению магнитного поля $\vec{B}_{\text{инд}}$, направленного в противоположную сторону исходному полю. Другими словами, индукционный ток во всех случаях направлен таким образом, что его действие противоположно действию причины, вызвавшей этот ток.

5. Правило (закон) Ленца применимо к случаям, когда проводник неподвижен, а изменяется внешнее магнитное поле. Правило Ленца подтверждает лишний раз справедливость закона сохранения энергии. Если предположить, что вторичное индуцированное поле имело бы направление совпадающее с исходным полем, то не существовало бы причин неограниченного возрастания индукционного тока во время всех изменений исходного поля. А на самом деле такового не наблюдается. Возникновение индукционных токов сопровождается совершением дополнительной ра-

боты внешними силами, а силы, вызванные индукционным током, препятствуют движению.

6. Опытным путём установлено, что индуктивность любого контура наряду с его геометрическими характеристиками зависит от физических свойств среды, в которой контур находится. Так, например, если внутрь соленоида вставить железный сердечник, то при прочих равных условиях экстратоки в цепи возрастают многократно, что говорит об увеличении индуктивности. Если индуктивность контура в воздухе равна L_0 , а в некоторой среде – L , то изменение индуктивности можно охарактеризовать отношением

$$\frac{L}{L_0} = \mu,$$

где μ – магнитная проницаемость среды, характеризующая магнитные свойства вещества, в котором находится рассматриваемый контур. Взаимосвязь магнитной индукции с напряжённостью поля в этом случае представится следующим образом

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}.$$

Из уравнения видно, что единица магнитной проницаемости среды 1 Гн/м имеет место когда напряжённость магнитного поля в 1 А/м создаёт магнитную индукцию 1 Тл.

7. При перемещении катушки вдоль стального сердечника показания приборов будут неизменными, а при удалении сердечника из катушки её индуктивность несколько уменьшится ($\mu \approx 8,796 \times 10^{-4}$ Гн/м), следовательно, уменьшатся и показания гальванометра.

72. Медный куб с длиной ребра $a = 0,1$ м скользит по столу с постоянной скоростью $v = 10$ м/с, касаясь стола одной из плоских поверхностей. Вектор индукции магнитного поля $B = 0,2$ Тл направлен вдоль поверхности стола и перпендикулярно вектору скорости куба. Найдите модуль вектора напряженности электрического поля, возникающего внутри металла, и модуль разности потенциалов между центром куба и одной из его вершин.

Решение

1. При движении проводящего куба в магнитном поле за счет действия на свободные носители заряда (электроны) силы Лоренца произойдёт их перемещение, таким образом, что на верхней и нижней плоскостях возникнет разность потенциалов, равная ЭДС индукции:

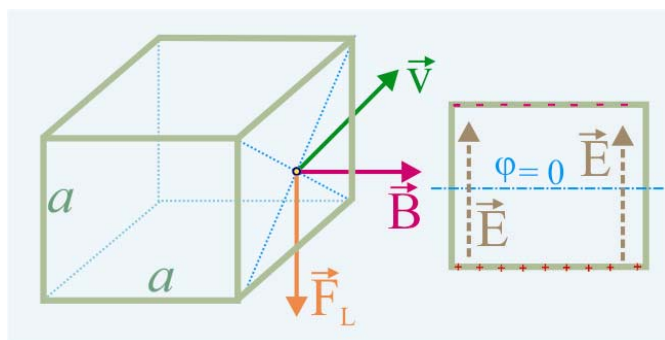
$$|\varepsilon_i| = \frac{Bva\Delta t}{\Delta t} = Bva = 0,2B;$$

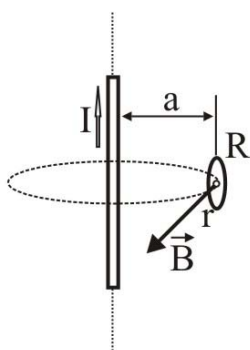
2. Напряжённость электрического поля:

$$|\vec{E}| = \frac{\varepsilon_i}{a} = 2 \frac{B}{m};$$

3. Поскольку электрические заряды сосредоточены на поверхности, то все прочие точки внутри куба имеют нулевой потенциал, следовательно:

$$|\Delta\varphi| = \varepsilon_i = 0,2B;$$





73. На расстоянии $a = 1$ м от длинного прямолинейного проводника по которому течёт постоянный ток силой $I = 1000$ А находится кольцо радиусом $r = 1$ см. Кольцо расположено так, что через его поверхность проходит максимальный магнитный поток. Определить количество электричества, которое протечёт по кольцу при внезапном исчезновении тока в проводнике. Электрическое сопротивление кольца равно $R = 10$ Ом.

Решение

1. Определим величину магнитной индукции на удалении a от прямолинейного проводника

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a},$$

2. Магнитный поток пронизывающий поверхность кольца, при расположении его плоскости перпендикулярно вектору магнитной индукции B

$$\Phi = Bs = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot \pi r^2 = \frac{\mu_0 I r^2}{2a}.$$

3. Индукционный ток в кольце в этом случае определится уравнением

$$i = \frac{|\varepsilon_i|}{R} = \frac{\mu_0 I r^2}{2a \Delta t R} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \Rightarrow \Delta Q = \frac{\mu_0 I r^2}{2a R} = \frac{12,56 \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \cdot 10^{-4}}{20} \cong 6,28 \text{ нКл}.$$

74. Медное кольцо из провода диаметром 2 мм расположено в однородном магнитном поле, магнитная индукция которого меняется по модулю со скоростью 1,09 Тл/с. Плоскость кольца перпендикулярна вектору магнитной индукции. Каков диаметр кольца, если возникающий в нём индукционный ток равен 10 А? Удельное сопротивление меди $\rho_{\text{Cu}} = 1,72 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

Решение

1. ЭДС индукции, возникающей в кольце радиусом R :

$$\varepsilon_i = \xi S; \quad \xi = \frac{dB}{dt}; \quad S = \pi R^2; \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_i = \xi \pi R^2$$

2. Сопротивление кольца радиуса R с радиусом проволоки $r = 1 \cdot 10^{-3}$ м:

$$Z = \frac{\rho_{\text{Cu}} \ell}{s}; \quad \ell = 2\pi R; \quad s = \pi r^2; \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{2\rho_{\text{Cu}} R}{r^2};$$

3. Сила индукционного тока в кольце:

$$i_i = \frac{\varepsilon_i}{Z} = \frac{\xi \pi R r^2}{2\rho_{\text{Cu}}}; \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2i_i \rho_{\text{Cu}}}{\xi \pi r^2} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 1,72 \cdot 10^{-8}}{1,09 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} \approx 0,1 \text{ м}; \quad D \approx 0,2 \text{ м};$$

75. В идеальном колебательном контуре в момент времени t напряжение на конденсаторе равно 1,2 В, а сила тока в катушке индуктивности равна 4 мА. Амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе 2,0 В. Найдите амплитуду колебаний силы тока в катушке.

Решение

1. Сумма энергии, магнитного поля катушки индуктивности и электрического поля конденсатора в любой момент времени равна максимуму магнитной или электрической энергии колебательного контура, это в соответствии с законом сохранения энергии:

$$Li^2 + CU^2 = CU_m^2; \Rightarrow \frac{C}{L} = \frac{i^2}{U_m^2 - U^2};$$

2. С другой стороны, максимальное значение энергии магнитного поля в катушке индуктивности равно максимальному значению энергии электрического поля в конденсаторе:

$$Li_m^2 = CU_m^2; \Rightarrow i_m = \sqrt{\frac{C}{L} U_m^2} = \sqrt{\frac{i^2 U_m^2}{U_m^2 - U^2}} = i U_m \sqrt{\frac{1}{U_m^2 - U^2}};$$

$$i_m = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \sqrt{\frac{1}{4 - 1,44}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 5 \text{ mA};$$

76. Имеется воздушный конденсатор с плоскими пластинами площадью $s = 100 \text{ см}^2$ и зазором между ними $d = 2,5 \text{ см}$. Пространство между пластинами ионизируется рентгеновскими лучами, так что в секунду образуется $N = 10^{10}$ пар ионов. На пластины конденсатора подаётся постоянное напряжение $U_0 = 2 \text{ кВ}$. В измерительную схему включены сопротивления $R_1 = R_2 = 10^{10} \text{ Ом}$. Ток, какой силы потечёт через измерительный прибор, включенный в цепь источника питания?

Решение

1. Возникновение носителей заряда вследствие ионизации электрически нейтральных молекул воздуха вызовет электрический ток, сила которого будет пропорциональна величине заряда, их количеству и объёму конденсатора

$$i_c = NeV_c,$$

где $e \cong 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ – заряд одного иона, N – число пар ионов образующихся в одну секунду в единице объёма конденсатора.

2. Выразим напряжение источника U_0 в виде суммы падений напряжений на сопротивлениях

$$U_0 = U_{R_1} + U_{R_2} = I_{R_1} R_1 + I_{R_2} R_2.$$

3. Сила тока через сопротивление R_1 должна быть равна сумме сил токов через сопротивление R_2 и конденсатор, т.е.

$$I_{R_1} = I_{R_2} + i_c.$$

4. Образует систему уравнений

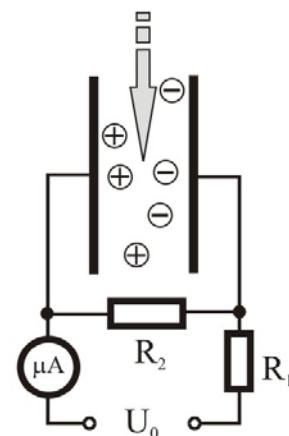
$$\left. \begin{aligned} U_0 &= I_{R_1} R_1 + I_{R_2} R_2, \\ I_{R_1} &= I_{R_2} + i_c \end{aligned} \right\}.$$

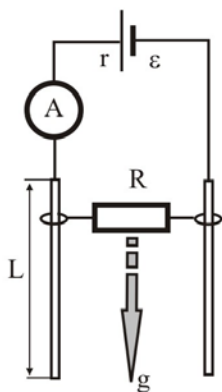
Сила тока через микроамперметр будет равна силе тока через сопротивление R_1 , поэтому выразим из первого уравнения системы (4) силу тока I_{R_2} и подставим во второе уравнение

$$I_{R_2} = \frac{U_0 - I_{R_1} R_1}{R_2}, \Rightarrow I_{R_1} = \frac{U_0 - I_{R_1} R_1}{R_2} + i_c,$$

$$I_{R_1} R_2 = U_0 - I_{R_1} R_1 + i_c R_2, \quad I_{R_1} (R_2 + R_1) = U_0 + NeV_c,$$

$$I_{R_1} = I_{\mu A} = \frac{U_0 + NeV_c}{R_1 + R_2} \cong \frac{2 \cdot 10^3 + 10^{10} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{10}} \cong 1 \cdot 10^{-7} \text{ A}.$$





77. Два вертикально расположенных стержня, имеющие длину $L = 1$ м и диаметр $d = 1$ см сопротивление на единицу длины $\rho = 1 \cdot 10^{-5}$ Ом·м, подсоединены через идеальный амперметр к источнику ЭДС $\varepsilon = 1,5$ В и внутренним сопротивлением $r_0 = 0,05$ Ом. Скользящие контакты соединены с сопротивлением $R = 0,1$ Ом, которое в поле тяжести g начинает соскальзывать вдоль них из верхней точки вниз без нарушения контакта, как показано на рисунке. В пренебрежении эффектами, связанными с магнитным полем, определить какое значение тока I покажет амперметр через время $\tau = 0,5$ с после начала движения? Силу трения не учитывать.

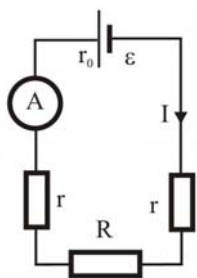
Решение

1. Запишем кинематические уравнения движения сопротивления, считая, что на него действует только сила тяжести и движение происходит по вертикальной оси с нулевой начальной скоростью

$$y = \frac{gt^2}{2},$$

и определим расстояние, которое пройдёт сопротивление за время τ

$$\ell = \frac{5 \cdot 0,5^2}{2} = 0,625 \text{ м.}$$



2. Определим электрическое сопротивление одного отрезка стержня длиной ℓ

$$r = \rho \frac{4\ell}{\pi d^2} = 1 \cdot 10^{-5} \frac{4 \cdot 0,625}{3,14 \cdot 10^{-4}} \cong 0,08 \text{ Ом.}$$

3. Электрическая схема установки, таким образом представит собой три последовательно включенных внешних сопротивления: $R_0 = R + 2r$ и внутреннее сопротивление источника r_0 . Закон Ома для полной цепи в этом случае запишется так

$$I = \frac{\varepsilon}{R + 3r + r_0} = \frac{1,5}{0,1 + 0,16 + 0,05} \cong 4,8 \text{ А.}$$

Оптика

78. В дно водоема глубиной 3 м вертикально вбита свая, скрытая под водой. Высота сваи 2 м. Угол падения солнечных лучей на поверхность воды равен 30° . Определите длину тени сваи на дне водоема. Коэффициент преломления воды $n = \frac{4}{3}$.

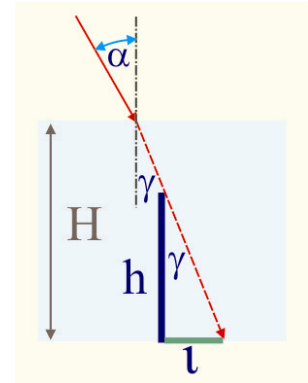
Решение

1. В соответствии с законом преломления света:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n; \Rightarrow \gamma = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right) \approx 22^\circ;$$

2. Из прямоугольного треугольника, образованного шестом, преломлённым лучом и тенью шеста:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\ell}{h}; \Rightarrow \ell = h \operatorname{tg} \gamma \approx 2 \cdot 0,4 \approx 0,8 \text{ м};$$



79. На поверхности воды плавает прямоугольный надувной плот длиной 6 м. Небо затянуто сплошным облачным покровом, полностью рассеивающим солнечный свет. Глубина тени под плотом равна 2,3 м. Определите ширину плота. Глубиной погружения плота и рассеиванием света водой пренебречь. Показатель преломления воды относительно воздуха принять равным $\frac{4}{3}$.

Решение

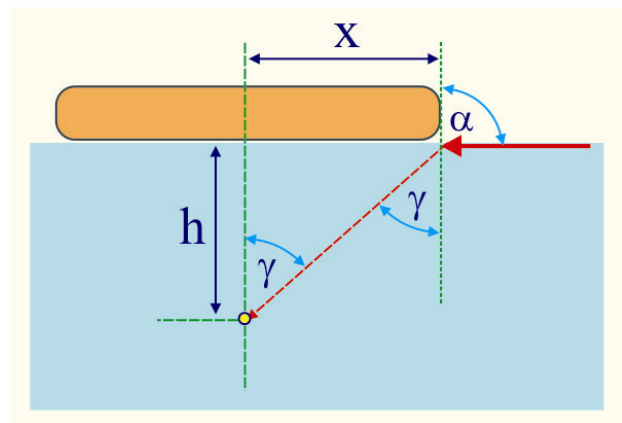
1. Рассеянный свет означает, что угол падения лучей будет равен 90° , закон преломления в этом случае запишется следующим образом:

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{1}{n};$$

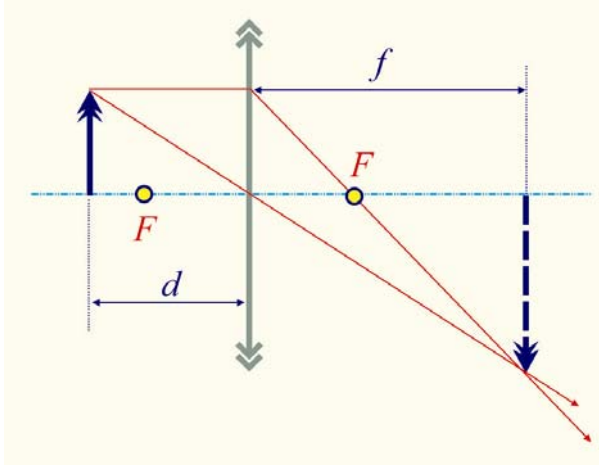
$$\gamma = \arcsin \frac{1}{n} \approx 48,6^\circ;$$

2. Из прямоугольного треугольника образованного преломленным лучом, высотой тени и поверхностью плота:

$$\frac{x}{h} = \operatorname{tg} \gamma; \Rightarrow x = h \operatorname{tg} \gamma \approx 2,3 \cdot 1,134 \approx 2,6 \text{ м}; \quad L = 2x \approx 5,2 \text{ м};$$



80. Линза, фокусное расстояние которой 15 см, даёт на экране изображение предмета с пятикратным увеличением. Экран пододвинули к линзе вдоль её главной оптической оси на 30 см. Затем при неизменном положении линзы передвинули предмет так, чтобы изображение снова стало резким. На какое расстояние сдвинули предмет относительно его первоначального положения?



Решение

1. Используя формулы тонкой собирающей линзы и увеличения Γ определим первоначальные расстояния от предмета до линзы d и от линзы до изображения f :

$$\Gamma = \frac{f}{d}; \quad F = \frac{fd}{f+d};$$

$$F = \frac{d}{1 + \frac{1}{\Gamma}}; \Rightarrow d = F \left(1 + \frac{1}{\Gamma} \right);$$

$$d = 15(1 + 0,2) = 18 \text{ см}; \quad f = \Gamma d = 90 \text{ см};$$

2. После расположения изображения на расстоянии от линзы $f_1 = 60$ см

$$d_1 = \frac{F f_1}{f_1 - F} = \frac{15 \cdot 60}{60 - 15} = 20 \text{ см};$$

3. Необходимое смещение предмета для получения его резкого изображения:

$$\Delta d = d_2 - d_1 = 2 \text{ см};$$

81. На экране с помощью тонкой линзы получено изображение предмета с пятикратным увеличением. Экран передвинули на 30 см вдоль главной оптической оси линзы. Затем при неизменном положении линзы передвинули предмет, чтобы изображение снова стало резким. В этом случае получилось изображение с трехкратным увеличением. На сколько пришлось передвинуть предмет относительно его первоначального положения?

Решение

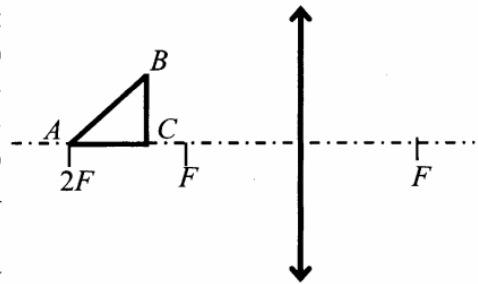
1. Определим фокусное расстояние линзы F через заданное перемещение экрана $\Delta f = f_1 - f_2$ и увеличения Γ_1 и Γ_2 :

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{f_1 d_1}{f_1 + d_1}; \\ F &= \frac{f_2 d_2}{f_2 + d_2}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} f_1 &= F(\Gamma_1 + 1); \\ f_2 &= F(\Gamma_2 + 1); \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta f = F(\Gamma_1 - \Gamma_2); \Rightarrow F = \frac{\Delta f}{\Gamma_1 - \Gamma_2} = 15 \text{ см};$$

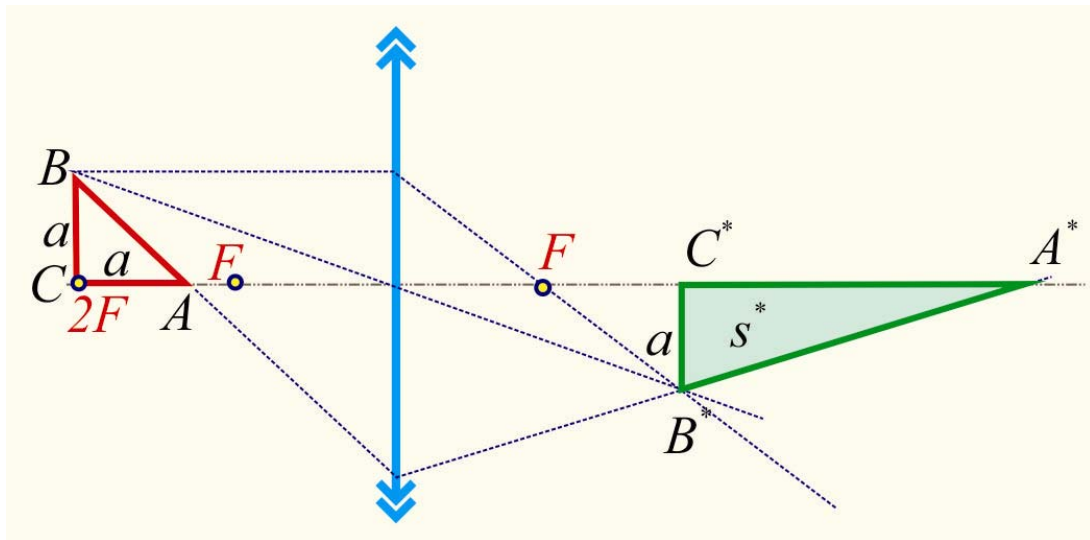
2. Определим необходимое смещение изображения:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= F \left(1 + \frac{1}{\Gamma_1} \right); \\ d_2 &= F \left(1 + \frac{1}{\Gamma_2} \right); \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} d_1 &= 15 \left(1 + \frac{1}{5} \right) = 18 \text{ см}; \\ d_2 &= 15 \left(1 + \frac{1}{3} \right) = 20 \text{ см}; \end{aligned} \right\} \Delta d = d_2 - d_1 = 2 \text{ см};$$

82. Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC расположен перед тонкой собирающей линзой оптической силой 2,5 дптр так, что его катет AC лежит на главной оптической оси линзы (см. рисунок). Вершина прямого угла C лежит ближе к центру линзы, чем вершина острого угла A . Расстояние от центра линзы до точки A равно удвоенному фокусному расстоянию линзы, $AC = 4$ см. Постройте изображение треугольника и найдите площадь получившейся фигуры.



Решение



1. Фокусное расстояние линзы:

$$F = \frac{1}{D} = \frac{1}{2,5} = 0,4 \text{ м} = 40 \text{ см.}$$

2. Площадь прямоугольного треугольника $A^*B^*C^*$ определяется при условии расположения катета BC на двойном фокусном расстоянии от плоскости линзы, когда размер предмета равен размеру его изображения:

$$S^* = \frac{1}{2} A^*C^* \cdot B^*C^*; \quad B^*C^* = a;$$

3. Катет C^*A^* можно определить из уравнения тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{2F - a} + \frac{1}{2F + C^*A^*}; \Rightarrow C^*A^* = \frac{aF}{F - a} = \frac{4 \cdot 40}{36} = 4,4 \text{ см};$$

4. Площадь треугольника:

$$S^* = \frac{4 \cdot 4,4}{2} \approx 8,88 \text{ см}^2;$$

83. Изображение предмета на дисплее полноформатного цифрового зеркального фотоаппарата при съёмке с расстояния 18 м получилось высотой 6 мм, а при съёмке с расстояния 10 м – высотой 11 мм. Определить фокусное расстояние используемого объектива.

Решение

1. Будем считать для упрощения анализа, что в фотоаппарате используется собирающая линза, перемещающаяся относительно матрицы, поэтому для заданных условий, на основании формулы тонкой линзы можно записать следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} &= \frac{1}{F}; & \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} &= \frac{1}{F}; \\ \frac{f_1}{d_1} &= \frac{H_1}{h}; & \frac{f_2}{d_2} &= \frac{H_2}{h}; \end{aligned} \right\}$$



Полученная система четырех уравнений содержит четыре неизвестных величины.

2. Решим систему уравнений:

$$f_1 = \frac{d_1 H_1}{h}; \quad f_2 = \frac{d_2 H_2}{h}; \quad \frac{1}{d_1} + \frac{h}{d_1 H_1} = \frac{1}{F}; \quad \frac{1}{d_2} + \frac{h}{d_2 H_2} = \frac{1}{F};$$

Перепишем два последние уравнения:

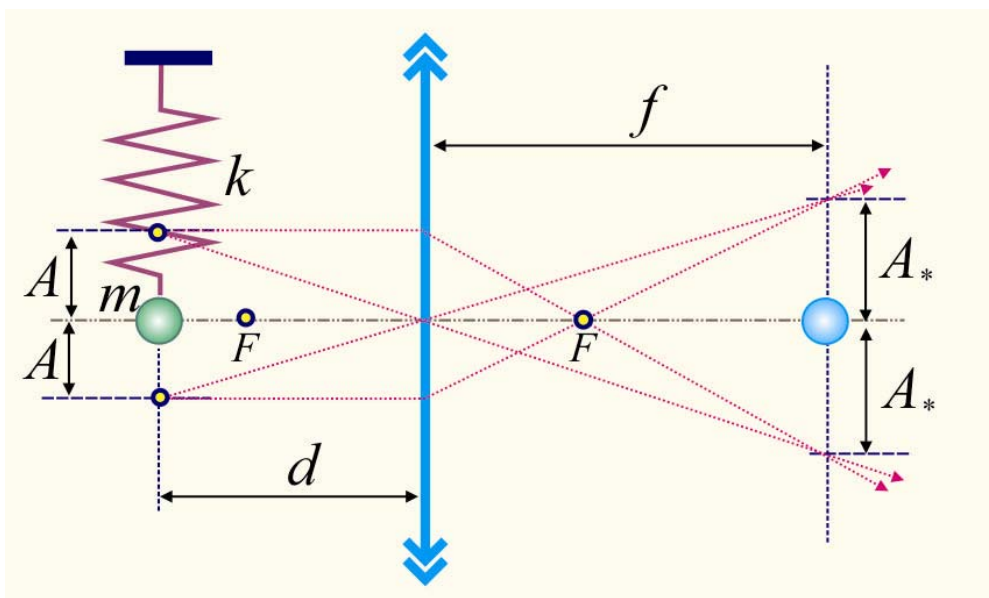
$$\frac{1}{F} - \frac{1}{d_1} = \frac{h}{d_1 H_1}; \quad \frac{1}{F} - \frac{1}{d_2} = \frac{h}{d_2 H_2}; \quad \frac{d_1 - F}{d_1 F} = \frac{h}{d_1 H_1}; \quad \frac{d_2 - F}{d_2 F} = \frac{h}{d_2 H_2};$$

Разделим уравнения почленно:

$$\frac{d_1 - F}{d_2 - F} = \frac{H_2}{H_1}; \quad \Rightarrow \quad F = \frac{d_2 H_2 - d_1 H_1}{H_2 - H_1} \cong 0,4 \text{ м}.$$

84. Груз массой 0,1 кг, прикрепленный к пружине жесткостью 0,4 Н/м, совершает гармонические колебания с амплитудой 0,1 м. При помощи собирающей линзы с фокусным расстоянием 0,2 м изображение колеблющегося груза проецируется на экран, расположенный на расстоянии 0,5 м от линзы. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна траектории груза и плоскости экрана. Определите максимальную скорость изображения груза на экране.

Решение



1. Используя заданные параметры тонкой собирающей линзы, определим её увеличение:

$$F = \frac{fd}{f+d}; \Rightarrow F = \frac{f}{\frac{f}{d}+1} = \frac{f}{\Gamma+1}; \Rightarrow \Gamma = \frac{f-F}{F} = 1,5;$$

2. Амплитудное значение смещение изображения груза при колебаниях:

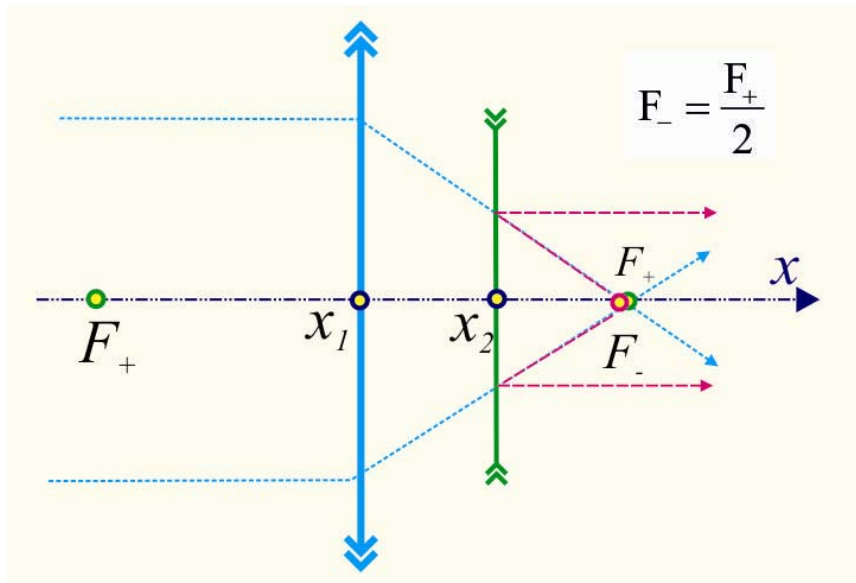
$$A_* = \Gamma A = 0,15\text{ м};$$

3. Максимальная скорость перемещения изображения по экрану:

$$\frac{kA_*^2}{2} = \frac{mv_*^2}{2}; \Rightarrow v_* = A_* \sqrt{\frac{k}{m}} = A_* \omega = 0,15 \sqrt{\frac{0,4}{0,1}} = 0,3 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

85. На оси Ox в точке $x_1 = 0$ находится оптический центр тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 30$ см, а в точке $x_2 = 15$ см – тонкой рассеивающей линзы. Главные оптические оси обеих линз лежат на оси Ox . На собирающую линзу по оси Ox падает параллельный пучок света из области $x < 0$. Пройдя оптическую систему, пучок остается параллельным. Найдите фокусное расстояние F_2 рассеивающей линзы.

Решение



1. Лучи, распространяющиеся параллельно главной оптической оси собирающей тонкой линзы собираются в её фокусе, а в рассеивающей линзе преломляются таким образом, что через её фокус проходят продолжения падающих лучей.

2. Как видно из построения, на выходе из собирающей линзы лучи будут параллельны, если фокусы собирающей и рассеивающей линз совпадут, т.е.

$$F_- = \frac{F_+}{2} = 15 \text{ см};$$

Квантовая и ядерная физика

86. Красная граница фотоэффекта для вещества фотокатода $\lambda_0 = 450$ нм. При облучении катода светом с длиной волны λ фототок прекращается при напряжении между анодом и катодом $U = 1,4$ В. Определите длину волны λ .

Решение

1. Работа выхода электронов из материала фотокатода:

$$A = \frac{hc}{\lambda_0} \approx \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4,5 \cdot 10^{-7}} \approx 4,41 \cdot 10^{-19} \text{ Дж};$$

2. Уравнение фотоэффекта для искомой длины волны λ :

$$\frac{hc}{\lambda} = eU + A; \quad \lambda \approx \frac{hc}{eU + A} \approx \frac{2 \cdot 10^{-25}}{2,24 \cdot 10^{-19} + 4,41 \cdot 10^{-19}} \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ м} \approx 300 \text{ нм};$$

87. Фотокатод освещается светом с длиной волны $\lambda = 300$ нм. Вылетевшие из катода электроны попадают в однородное магнитное поле с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-4}$ Тл перпендикулярно линиям индукции этого поля и движутся по окружностям. Максимальный радиус такой окружности $R = 2$ см. Какова работа выхода $A_{\text{вых}}$ для вещества фотокатода?

Решение

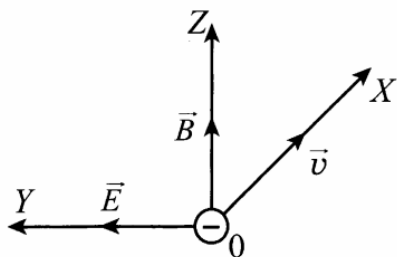
1. Линейная скорость электрона определится из условия его нахождения на круговой орбите в магнитном поле:

$$\frac{mv^2}{2} = eBv; \quad \Rightarrow \quad v = \frac{eBR}{m};$$

2. Уравнение внешнего фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{mv^2}{2} + A; \quad \Rightarrow \quad A = \frac{hc}{\lambda} - \frac{(eBR)^2}{2m};$$

$$A \approx \frac{2 \cdot 10^{-25}}{3 \cdot 10^{-7}} - \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \approx 4,42 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 2,76 \text{ эВ};$$



88. Электроны, вылетевшие в положительном направлении оси OX с катода фотоэлемента под действием света, попадают в электрическое и магнитное поля (см. рисунок). Какой должна быть напряжённость электрического поля E , чтобы самые быстрые электроны отклонялись в положительном направлении оси OY ? Работа выхода для вещества катода $2,39$ эВ, частота света $6,4 \cdot 10^{14}$ Гц, индукция магнитного поля 10^{-3} Тл.

Решение

1. Условие задачи сформулировано некорректно, т.к. при заданном направлении напряжённости электрического поля сила Кулона совпадает по направлению с силой Лоренца, т.е. При любом значении напряжённости электроны (отрицательно заряженные частицы) в направлении положительной оси Y отклоняться не будут. Чтобы задача приобрела смысл, изменим направление вектора напряжённости электрического поля на обратное.

2. Определим максимальное значение скорости фотоэлектронов:

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} + A; \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2(h\nu - A)}{m}};$$

3. Модуль силы Лоренца, действующей на электрон в магнитном поле:

$$F_L = evB = eB\sqrt{\frac{2(h\nu - A)}{m}};$$

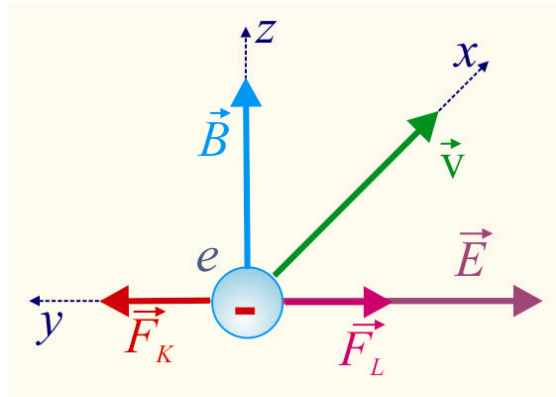
4. Модуль силы Кулона, одновременно действующей на электрон:

$$F_K = eE;$$

5. Условие отклонения самых скоростных электронов в положительном направлении оси Y:

$$|\vec{F}_K| > |\vec{F}_L|; \quad eE > eB\sqrt{\frac{2(h\nu - A)}{m}}; \quad |\vec{E}| > B\sqrt{\frac{2(h\nu - A)}{m}};$$

$$|\vec{E}| > 10^{-3} \sqrt{\frac{2(6,61 \cdot 10^{-34} \cdot 6,4 \cdot 10^{14} - 3,8 \cdot 10^{-19})}{9,1 \cdot 10^{-31}}} > 307 \frac{\text{В}}{\text{м}};$$



89. Электромагнитное излучение используется для нагревания воды массой 1 кг. За время 700 с температура воды увеличивается на 10°C. Какова длина волны излучения, если источник испускает 10^{20} фотонов за 1 с? Считать, что излучение полностью поглощается водой.

Решение

1. Количество теплоты, необходимое для нагревания воды:

$$Q = cm\Delta T;$$

2. Энергия фотонов, поглощённых водой за время $\tau = 700$ с:

$$E_f = \frac{hc}{\lambda} \zeta \tau;$$

3. Длина волны излучения:

$$E_f \approx Q; \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} \zeta \tau \approx cm\Delta T; \quad \lambda \approx \frac{hc\zeta\tau}{cm\Delta T} \approx \frac{6,61 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{22} \cdot 700}{4200 \cdot 1 \cdot 10} \approx 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ м};$$

90. Для разгона космических аппаратов и коррекции их орбит предложено использовать солнечный парус – скрепленный с аппаратом легкий экран большой площади из тонкой пленки, которая зеркально отражает солнечный свет. Каково добавочное изменение скорости космического аппарата массой 500 кг (включая массу паруса) за 24 часа за счет паруса размерами 100 м × 100 м? Мощность W солнечного излучения, падающего на 1 м² поверхности, перпендикулярной солнечным лучам, составляет 1370 Вт/м².

Решение

1. Модуль силы, обусловленной давлением солнечного света на парус:

$$|\vec{F}| = \frac{2WS}{c};$$

2. В соответствии со вторым законом Ньютона:

$$F = m \frac{\Delta v}{\Delta t}; \Rightarrow \Delta v = \frac{F \Delta t}{m} = \frac{2WS \Delta t}{mc} \approx \frac{2 \cdot 1370 \cdot 10^4 \cdot 8,64 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 15,78 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

91. Для разгона космических аппаратов и коррекции их орбит предложено использовать солнечный парус – скрепленный с аппаратом легкий экран большой площади из тонкой пленки, которая зеркально отражает солнечный свет. Мощность W солнечного излучения, падающего на 1 м² поверхности, перпендикулярной солнечным лучам, составляет вблизи Земли 1370 Вт/м². Во сколько раз ближе к Солнцу, чем Земля, находится аппарат массой 500 кг (включая массу паруса), снабженный парусом размерами 100 м × 100 м, если давление солнечных лучей сообщает ему дополнительное ускорение 10⁻⁴ g?

Решение

1. В соответствии с законом обратных квадратов, мощность W солнечного излучения, отнесённая к единице площади, обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника излучения:

$$W \sim \frac{1}{r^2};$$

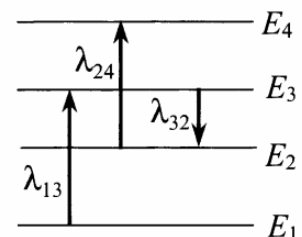
2. Определим мощность солнечного излучения на искомом расстоянии:

$$|\vec{F}| = \frac{2W_x S}{c}; \quad a = \frac{2W_x S}{mc}; \Rightarrow W_x = \frac{amc}{2S} \approx \frac{10^{-3} \cdot 500 \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^4} \approx 7357 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2};$$

3. Отношение расстояний:

$$\xi = \sqrt{\frac{W_x}{W}} \approx \sqrt{\frac{7357}{1370}} \approx 2,3;$$

92. На рисунке изображены энергетические уровни атома и указаны длины волн фотонов, излучаемых и поглощаемых при переходах с одного уровня на другой. Какова длина волны для фотонов, излучаемых при переходе с уровня E_4 на уровень E_1 , если $\lambda_{13} = 400$ нм, $\lambda_{24} = 500$ нм, $\lambda_{32} = 600$ нм?



Решение

1. В соответствии с постулатами Бора составим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{hc}{\lambda_{1-3}} &= E_3 - E_1; \\ \frac{hc}{\lambda_{2-4}} &= E_4 - E_1; \\ \frac{hc}{\lambda_{3-2}} &= E_3 - E_2; \end{aligned} \right\}$$

2. Используя заданную схему энергетических уровней атома, имеем:

$$E_4 - E_1 = (E_4 - E_2) - (E_3 - E_2) + (E_3 - E_1);$$

3. Подставляя в последнее уравнение значение энергий перехода, получим:

$$\frac{1}{\lambda_{4-1}} = \frac{1}{\lambda_{1-3}} + \frac{1}{\lambda_{2-4}} - \frac{1}{\lambda_{3-2}}; \quad \frac{1}{10^{-2}\lambda_{4-1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{30+24-20}{120} = \frac{34}{120};$$

$$\lambda_{4-1} \approx 353 \text{ нм};$$

93. Уровни энергии электрона в атоме водорода задаются формулой $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ эВ, где $n = 1, 2, 3, \dots$. При переходе атома из состояния E_2 в состояние E_1 атом испускает фотон. Попад на поверхность фотокатода, фотон выбивает фотоэлектрон. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта для материала поверхности фотокатода, $\lambda_{\text{кр}} = 300 \text{ нм}$. Чему равна максимально возможная кинетическая энергия фотоэлектрона?

Решение

1. При выбивании фотоэлектрона атомом поглощается энергия:

$$h\nu = E_2 - E_1 = 13,6 - \frac{13,6}{n^2} = 13,6 - \frac{13,6}{4} = 10,2 \text{ эВ} \approx 1,63 \cdot 10^{-18} \text{ Дж};$$

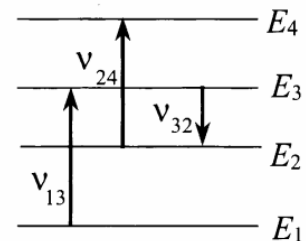
2. Работа выхода электрона из материала фотокатода:

$$A = \frac{hc}{\lambda_0} \approx \frac{2 \cdot 10^{-25}}{3 \cdot 10^{-7}} \approx 6,67 \cdot 10^{-19} \text{ Дж};$$

3. Максимальное значение кинетической энергии фотоэлектронов, вылетающих с поверхности фотокатода:

$$h\nu = K_{\text{max}} + A; \Rightarrow K_{\text{max}} = h\nu - A \approx 9,65 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 6 \text{ эВ};$$

94. На рисунке представлены энергетические уровни электронной оболочки атома и указаны частоты фотонов, излучаемых и поглощаемых при некоторых переходах между ними. Какова максимальная длина волны фотонов, излучаемых атомом при любых возможных переходах между уровнями E_1, E_2, E_3 и E_4 , если $\nu_{13} = 7 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$, $\nu_{24} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$, $\nu_{32} = 3 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$?



Решение

1. Максимальная длина волны (минимальная частота) волны фотонов будет наблюдаться, в соответствии с постулатами Бора при переходах между уровнями 3 и 4 (или наоборот):

$$\Delta E_{\min} = h\nu_{4-3} = h(\nu_{2-4} - \nu_{2-3}); \Rightarrow \nu_{\min} = \nu_{3-4} = 2 \cdot 10^{14} \text{ Гц},$$

что соответствует, длине волны:

$$\lambda_{\max} = \frac{c}{\nu_{\min}} \approx 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

95. Металлическая пластина облучается светом частотой $\nu = 1,6 \cdot 10^{15}$ Гц. Работа выхода электронов из данного металла равна 3,7 эВ. Вылетающие из пластины фотоэлектроны попадают в однородное электрическое поле напряжённостью 130 В/м, причём вектор напряжённости $\vec{E}$ направлен к пластине перпендикулярно её поверхности. Какова максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов на расстоянии 10 см от пластины?

Решение

1. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона при его выходе из фотокатода:

$$K_{\max} = h\nu - A;$$

2. При покидании пластины на электрон начинает действовать ускоряющее электрическое поле, работа которого при прохождении расстояния d определится как:

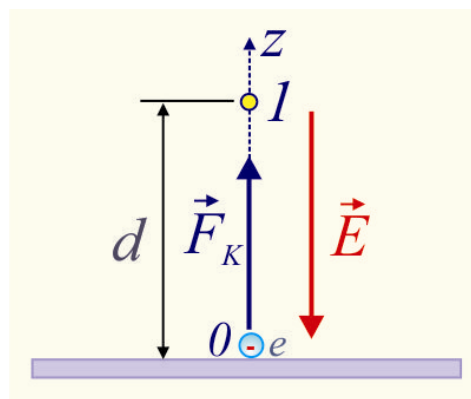
$$A_{0 \rightarrow 1} = eEd;$$

3. Суммарная кинетическая энергия электрона на удалении d от пластины

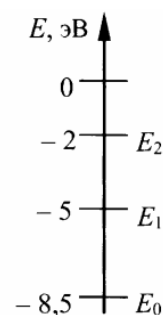
$$K_1 = K_{\max} + A_{0 \rightarrow 1} = h\nu - A + eEd;$$

$$K_1 \approx 6,61 \cdot 10^{-34} \cdot 1,6 \cdot 10^{15} - (3,7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}) + 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 130 \cdot 0,1;$$

$$K_1 \approx 2,5 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} \approx 15,6 \text{ эВ};$$



96. Предположим, что схема энергетических уровней атомов некоего вещества имеет вид, показанный на рисунке, и атомы находятся в состоянии с энергией E_1 . Электрон, столкнувшись с одним из таких атомов, отскочил, приобретя некоторую дополнительную энергию. Импульс электрона после столкновения с покоящимся атомом оказался равным $1,2 \cdot 10^{-24}$ кг·м/с. Определите кинетическую энергию электрона до столкновения. Возможностью испускания света атомом при столкновении с электроном пренебречь.



Решение

1. При столкновении электрона с атомом по абсолютно упругой схеме, атом теряет часть энергии в таком количестве, чтобы занять следующий нижний энергетический уровень, причём:

$$\Delta E = E_1 - E_0 = 3,5 \text{ эВ} \approx 5,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж};$$

2. Выразим изменение импульса электрона через изменение при столкновении его кинетической энергии:

$$\Delta K = \frac{m\Delta v^2}{2}; \Rightarrow \Delta v = \sqrt{\frac{2\Delta K}{m}}; \Delta p = m\Delta v = \sqrt{2m\Delta K};$$

3. Кинетическая энергия электрона после столкновения с неподвижным атомом:

$$K_2 = \frac{p^2}{2m};$$

4. Кинетическая энергия до столкновения электрона с неподвижным атомом:

$$K_1 = K_2 - \Delta E = \frac{p^2}{2m} - \Delta E \approx 7,9 \cdot 10^{-19} - 5,6 \cdot 10^{-19} \approx 2,3 \cdot 10^{-19} \text{ Дж};$$

97. Покоящийся атом водорода в основном состоянии ($E_1 = -13,6$ эВ) поглощает в вакууме фотон с длиной волны $\lambda = 80$ нм. С какой скоростью движется вдали от ядра электрон, вылетевший из атома в результате ионизации? Кинетической энергией образовавшегося иона пренебречь.

Решение

1. Энергия поглощённого фотона:

$$\varepsilon_f = \frac{hc}{\lambda} \approx 2,5 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} \approx 15,6 \text{ эВ};$$

2. Энергия покинувшего в результате ионизации атом электрона:

$$\Delta K = \varepsilon_f - E_1 \approx 2 \text{ эВ} \approx 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж};$$

3. Скорость электрона, обладающего энергией ΔK :

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta K}{m}} \approx \sqrt{\frac{6,4 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 8,4 \cdot 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

98. Уровни энергии электрона в атоме водорода задаются формулой $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$

эВ, где $n = 1, 2, 3, \dots$. При переходе атома из состояния E_2 в состояние E_1 атом испускает фотон. Попадая на поверхность фотокатода, фотон выбивает фотоэлектрон. Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта для материала поверхности фотокатода, $\lambda_{\text{кр}} = 300$ нм. Чему равна максимальная возможная скорость фотоэлектрона?

Решение

1. Энергия фотона, испускаемого при переходе атома с более высокого энергетического уровня на более низкий соседний уровень:

$$h\nu = E_2 - E_1 = 13,6 - \frac{13,6}{n^2} = 13,6 - \frac{13,6}{4} = 10,2 \text{ эВ} \approx 1,63 \cdot 10^{-18} \text{ Дж};$$

2. Работа выхода материала фотокатода:

$$A = \frac{hc}{\lambda_0} \approx \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^{-7}} \approx 6,67 \cdot 10^{-19} \text{ Дж};$$

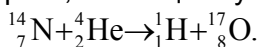
3. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов:

$$h\nu = K_{\text{max}} + A; \quad K_{\text{max}} = h\nu - A \approx 9,63 \cdot 10^{-19} \text{ Дж};$$

2. Максимальная скорость фотоэлектронов:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m}} \approx \sqrt{\frac{1,93 \cdot 10^{-18}}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 1,46 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

99. Определить величину энергии, поглощаемую ядерной реакцией:



Решение

1. Потребляемая энергия заданной ядерной реакции определится как:

$$Q = c^2 \left(\sum_1^2 m_2 - \sum_1^2 m_1 \right),$$

где $\sum_1^2 m_1$ – сумма масс ядер, вступивших в реакцию, $\sum_1^2 m_2$ – сумма масс образовавшихся в результате реакции частиц

$$\sum_1^2 m_1 = m_{{}^{14}_7\text{N}} + m_{{}^4_2\text{He}} \approx 14,003074 + 4,014102 \approx 18,0057 \text{ а.е.м.}$$

$$\sum_1^2 m_2 = m_{{}^1_1\text{H}} + m_{{}^{17}_8\text{O}} \approx 1,007825 + 16,999131 \approx 18,006956 \text{ а.е.м.}$$

$$\sum_1^2 m_2 - \sum_1^2 m_1 \approx 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ а.е.м.}$$

$$Q = c^2 \left(\sum_1^2 m_2 - \sum_1^2 m_1 \right) \approx 9 \cdot 10^{16} \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6606 \cdot 10^{-27} \approx 1,7938 \cdot 10^{-13} \text{ Дж};$$

$$Q \approx \frac{2,974 \cdot 10^{-10}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 1,13 \cdot 10^6 \text{ эВ} \approx 1,13 \text{ МэВ};$$

100. Радиоактивный препарат помещен в медный контейнер массой 0,5 кг. За 2 ч температура контейнера повысилась на 5,2 К. Известно, что данный препарат испускает α -частицы энергией 5,3 МэВ, причем энергия всех α -частиц полностью переходит во внутреннюю энергию. Найдите активность препарата А, т.е. количество α -частиц, рождающихся в нем за 1 с. Теплоемкостью препарата и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Решение

1. Количество теплоты, необходимое для нагревания контейнера на заданную температуру:

$$Q = c_{\text{Cu}} m \Delta T;$$

2. Количество α -частиц, необходимых для выделения энергии, необходимой для нагревания контейнера;

$$N_{\alpha} = \frac{Q}{\varepsilon_{\alpha}};$$

3. Активность препарата:

$$A = \frac{Q}{\varepsilon_{\alpha} \tau} = \frac{c_{\text{Cu}} m \Delta T}{\varepsilon_{\alpha} \tau} \approx \frac{400 \cdot 0,5 \cdot 5,2}{5,3 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 7200} \approx 1,7 \cdot 10^{11} \frac{1}{\text{с}};$$

**Тренировочные задания повышенного уровня,
рекомендованные в 2015 г.**

Механика

№1

Брусок массой $m_1 = 500$ г соскальзывает по наклонной плоскости с высоты $h = 0,8$ м и, двигаясь по горизонтальной поверхности, сталкивается с неподвижным бруском массой $m_2 = 300$ г. Считая столкновение абсолютно неупругим, определите общую кинетическую энергию брусков после столкновения. Трением при движении пренебречь. Считать, что наклонная плоскость плавно переходит в горизонтальную.

Решение

1. Скорость первого бруска в момент столкновения с неподвижным вторым бруском определится из закона сохранения энергии:

$$m_1 gh = \frac{m_1 v_1^2}{2}; \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh};$$

2. Скорость совместного движения брусков из закона сохранения импульса в проекции на направление движения:

$$(m_1 + m_2)u = m_1 v_1; \Rightarrow u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \sqrt{2gh}}{m_1 + m_2};$$

3. Общая кинетическая энергия брусков:

$$K = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)m_1^2 2gh}{2(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} gh = \frac{0,25}{0,8} \cdot 8 = 2,5 \text{ Дж};$$

№2

Брусок массой $m_1 = 500$ г соскальзывает по наклонной поверхности с высоты $h = 0,8$ м и, двигаясь по горизонтальной поверхности, сталкивается с неподвижным бруском массой $m_2 = 300$ г. Считая столкновение абсолютно неупругим, определите изменение кинетической энергии первого бруска в результате столкновения. Трением при движении пренебречь. Считать, что наклонная плоскость плавно переходит в горизонтальную.

Решение

1. Скорость первого бруска в момент столкновения с неподвижным вторым бруском определится из закона сохранения энергии:

$$m_1 gh = \frac{m_1 v_1^2}{2}; \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} \approx 4 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Скорость совместного движения брусков из закона сохранения импульса в проекции на направление движения:

$$(m_1 + m_2)u = m_1 v_1; \Rightarrow u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \sqrt{2gh}}{m_1 + m_2} \approx 2,5 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

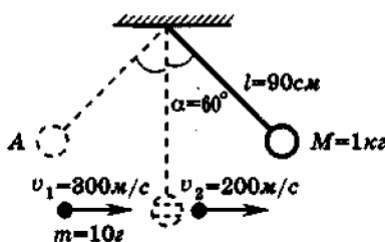
3. Изменение кинетической энергии первого бруска:

$$\Delta K_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 u^2}{2} = \frac{m_1}{2} (v_1^2 - u^2) = 0,25(16 - 6,25) \approx 2,44 \text{ Дж};$$

Энергия первого бруска уменьшится на 2,44 Дж.

№3

Шар массой 1 кг, подвешенный на нити длиной 90 см, отводят от положения равновесия на угол 60° и отпускают. В момент прохождения шаром положения равновесия в него попадает пуля массой 10 г, летящая навстречу шару со скоростью 300 м/с. Она пробивает его и вылетает горизонтально со скоростью 200 м/с, после чего шар продолжает движение в прежнем направлении. На какой максимальный угол отклонится шар после попадания в него пули? (Массу шара считать неизменной, диаметр шара – пренебрежимо малым по сравнению с длиной нити.)



Решение

1. Скорость шара в момент прохождения положения статического равновесия без взаимодействия с пулей:

$$u_0 = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\alpha)} = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Скорость шара после взаимодействия с пулей:

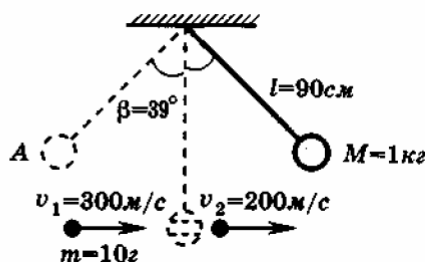
$$Mu = Mu_0 - m(v_1 - v_2); \Rightarrow u = u_0 - \frac{m}{M}(v_1 - v_2) = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

3. Максимальное отклонение маятника:

$$\frac{Mu^2}{2} = Mg\ell(1 - \cos\beta); \quad \beta = \arccos\left(1 - \frac{u^2}{2g\ell}\right) \approx 39^\circ;$$

№4

Шар массой 1 кг, подвешенный на нити длиной 90 см, отводят от положения равновесия и отпускают. В момент прохождения шаром положения равновесия в него попадает пуля массой 10 г, летящая навстречу шару со скоростью 300 м/с. Она пробивает его и вылетает горизонтально со скоростью 200 м/с, после чего шар, продолжая движение в прежнем направлении, отклоняется на угол 39° . Определите начальный угол отклонения шара. (Массу шара считать неизменной, диаметр шара – пренебрежимо малым по сравнению с длиной нити, $\cos 39^\circ = \frac{7}{9}$.)



Решение

1. Скорость шара в положении статического равновесия после попадания в него пули:

$$\frac{Mu^2}{2} = Mg\ell(1 - \cos\beta); \Rightarrow u = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\beta)} \approx 2\frac{M}{c};$$

2. Скорость шара до попадания пули:

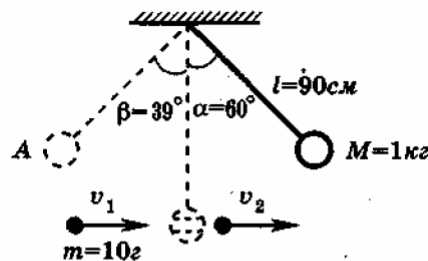
$$Mu_0 = Mu + m(v_1 - v_2); \Rightarrow u_0 = u + \frac{m}{M}(v_1 - v_2) \approx 3\frac{M}{c};$$

3. Угол максимального отклонения до попадания пули:

$$\frac{Mu_0^2}{2} = Mg\ell(1 - \cos\alpha); \Rightarrow \alpha = \arccos\left(1 - \frac{u_0^2}{2g\ell}\right) \approx 60^\circ;$$

№5

Шар массой 1 кг, подвешенный на нити длиной 90 см, отводят от положения равновесия на угол 60° и отпускают. В момент прохождения шаром положения равновесия в него попадает пуля массой 10 г, летящая навстречу шару. Она пробивает его и продолжает двигаться горизонтально. Определите изменение скорости пули в результате попадания в шар, если он, продолжая движение в прежнем направлении, отклоняется на угол 39° . (Массу шара считать неизменной, диаметр шара – пренебрежимо малым по сравнению с длиной нити, $\cos 39^\circ = \frac{7}{9}$.)



Решение

1. Изменение скорости пули определим по изменению её кинетической энергии на основании закона сохранения энергии шара:

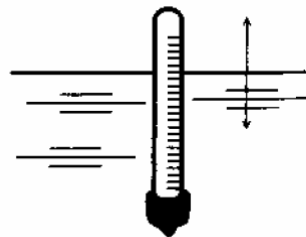
$$\left. \begin{aligned} \Pi_1 &= Mg\ell(1 - \cos\alpha); \\ \Pi_2 &= Mg\ell(1 - \cos\beta); \end{aligned} \right\} \Pi_1 - \Pi_2 = \frac{m\Delta v^2}{2};$$

$$\frac{2}{m} \{Mg\ell(1 - \cos\alpha) - Mg\ell(1 - \cos\beta)\} = \Delta v^2;$$

$$\Delta v = \frac{M}{m} \{ \sqrt{2g\ell(1 - \cos\alpha)} - \sqrt{2g\ell(1 - \cos\beta)} \} = \frac{M}{m} \{ \sqrt{g\ell} - \sqrt{0,444g\ell} \} \approx 100 \frac{M}{c};$$

№6

Ареометр, погруженный в жидкость, совершает вертикальные гармонические колебания с малой амплитудой (см. рисунок). Определите период этих колебаний. Масса ареометра равна 40 г, радиус его трубки 2 мм, плотность жидкости $0,8 \text{ г/см}^3$. Сопротивлением жидкости пренебречь.



Решение

1. Колебания ареометра возникают вследствие появления возвращающей силы при нарушении состояния равновесия. При погружении ареометра на величину y происходит некоторое преобладание силы Архимеда над силой тяжести, результирующая сила стремится вернуть ареометр в состояние статического равновесия, так возникают малые собственные незатухающие гармонические колебания. Уравнение второго закона Ньютона представится следующим образом:

$$ma_y = \rho g \pi r^2 y; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = \rho g \pi r^2 y; \quad m \ddot{y} - \rho g \pi r^2 y = 0;$$

2. Приведём уравнение к виду:

$$\ddot{y} - \frac{\rho g \pi r^2}{m} y = 0;$$

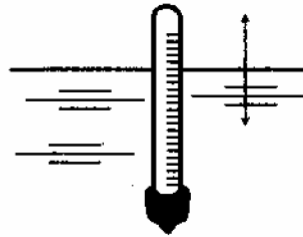
3. Введём обозначение:

$$\omega^2 = \frac{\rho g \pi r^2}{m}; \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} - \omega^2 y = 0;$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = r \sqrt{\frac{\pi \rho g}{m}}; \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}} = \frac{2}{2 \cdot 10^{-3}} \sqrt{\frac{3,14 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^3}} \approx 4 \text{ с};$$

№7

Ареометр, погруженный в жидкость, совершает малые вертикальные гармонические колебания с частотой 0,2 Гц (см. рисунок). Площадь сечения трубки ареометра 10 мм², его масса 50 г. Пренебрегая сопротивлением жидкости, найдите ее плотность.



Решение

1. Уравнение циклической частоты собственных колебаний позволяет определить плотность жидкости:

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}}; \quad \Rightarrow \quad 4\pi^2 \nu^2 m = \rho g S; \quad \rho = \frac{4\pi^2 \nu^2 m}{g S} \approx \frac{39,4 \cdot 0,04 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{10 \cdot 10^{-3}} \approx 788 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

№8

Однородный брусок с площадью поперечного сечения 10⁻² м² плавает на границе несмешивающихся жидкостей с плотностью 800 кг/м³ и 1000 кг/м³ (см. рисунок). Пренебрегая сопротивлением жидкостей, определите массу бруска, если период его малых вертикальных колебаний $\frac{\pi}{5}$ с.



Решение

1. Возвращающая сила:

$$\Delta F_A = (\rho_2 - \rho_1)gS\Delta y;$$

2. Циклическая частота собственных колебаний бруска:

$$\omega = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)gS}{m}};$$

3. Период собственных колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{(\rho_2 - \rho_1)gS}};$$

4. Масса бруска:

$$m = \frac{T^2(\rho_2 - \rho_1)gS}{4\pi^2} = \frac{\pi^2 \Delta \rho g S}{25 \cdot 4\pi^2} = \frac{\Delta \rho g S}{100} = \frac{200 \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{100} = 0,2 \text{ кг};$$

№9

На космическом аппарате, находящемся вдали от Земли, начал работать реактивный двигатель. Из сопла ракеты каждую секунду выбрасывается 2 кг газа ($\frac{\Delta m}{\Delta t} = 2 \text{ кг/с}$) со скоростью $v = 500 \text{ м/с}$. Исходная масса аппарата $M = 500 \text{ кг}$. Какой будет скорость v_1 аппарата через $t = 6 \text{ с}$ после старта? Начальную скорость аппарата принять равной нулю. Изменением массы аппарата за время движения пренебречь.

Решение

1. Закон сохранения импульса для системы "газ – аппарат" при вбрасывании из сопла двигателя постоянной секундной массы газа $\xi = \Delta m/\Delta t$ с постоянной скоростью v в проекции на направление движения аппарата:

$$Mv_1 = \xi tv; \Rightarrow v_1 = \frac{\xi tv}{M} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 500}{500} = 12 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

№10

На космическом аппарате, находящемся вдали от Земли, начал работать реактивный двигатель. Из сопла ракеты каждую секунду выбрасывается 2 кг газа ($\frac{\Delta m}{\Delta t} = 2 \text{ кг/с}$) со скоростью $v = 500 \text{ м/с}$. Исходная масса аппарата $M = 500 \text{ кг}$. Какую скорость приобретет аппарат, пройдя расстояние $s = 36 \text{ м}$? Начальную скорость аппарата принять равной нулю. Изменением массы аппарата за время движения пренебречь.

Решение

1. Закон сохранения импульса для системы "газ – аппарат" при вбрасывании из сопла двигателя постоянной секундной массы газа $\xi = \Delta m/\Delta t$ с постоянной скоростью v в проекции на направление движения аппарата:

$$Mat = \xi tv; \Rightarrow a = \frac{\xi v}{M};$$

2. Время разгона космического аппарата:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2sM}{\xi v}};$$

3. Скорость аппарата к концу разгона, на расстоянии s от старта:

$$v_1 = at = \frac{\xi v}{M} \sqrt{\frac{2sM}{\xi v}} = \sqrt{\frac{2\xi v s}{M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 500 \cdot 36}{500}} = 12 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

№11

На космическом аппарате, находящемся вдали от Земли, начал работать реактивный двигатель. Из сопла ракеты каждую секунду выбрасывается 2 кг газа ($\frac{\Delta m}{\Delta t} = 2 \text{ кг/с}$) со скоростью $v = 500 \text{ м/с}$. Какова масса аппарата, если через $t = 8 \text{ с}$ после старта пройденное им расстояние составило 64 м? Начальную скорость аппарата принять равной нулю. Изменением массы аппарата за время движения пренебречь.

Решение

1. Закон сохранения импульса для системы "газ – аппарат" при выбрасывании из сопла двигателя постоянной секундной массы газа $\xi = \Delta m / \Delta t$ с постоянной скоростью v в проекции на направление движения аппарата:

$$Mat = \xi tv; \Rightarrow a = \frac{\xi v}{M};$$

3. Скорость аппарата к концу разгона, на расстоянии s от старта:

$$v_1 = at = \frac{\xi v}{M} t; \Rightarrow \sqrt{\frac{2\xi sv}{M}} = \frac{\xi v}{M} t; \quad \frac{2\xi sv}{M} = \frac{\xi^2 v^2}{M^2} t^2;$$

$$M = \frac{\xi v t^2}{2s} = 500 \text{ кг};$$

№12

Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна 200 м/с. В точке максимального подъема снаряд разорвался на два одинаковых осколка. Первый упал на землю вблизи точки выстрела, имея скорость в 2 раза больше начальной скорости снаряда. На какую максимальную высоту поднялся второй осколок? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

1. Высота подъема снаряда в точке его разрыва:

$$h_0 = \frac{v_0^2}{2g} = 2000 \text{ м};$$

2. Скорость снаряда в точке выстрела при его свободном падении с высоты h_0

$$v_{\text{сп}} = \sqrt{2gh_0} = 200 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

3. Поскольку первый осколок упал со скоростью в 2 раза превышающей начальную, то скорость разлёта осколков одинаковой массы $u = 400$ м/с, стартуя с такой скоростью второй осколок снаряда поднимется на высоту:

$$h_2 = \frac{u^2}{2g} = 8000\text{м};$$

№13

Начальная скорость снаряда, выпущенного вертикально вверх, равна 300 м/с. В точке максимального подъема снаряд разорвался на два осколка. Первый осколок массой m_1 упал на землю вблизи точки выстрела, имея скорость в 2 раза больше начальной скорости снаряда, второй осколок массой m_2 имеет у поверхности земли скорость 600 м/с. Чему равно отношение масс $\frac{m_2}{m_1}$ этих осколков? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

1. Высота подъёма снаряда в точке его разрыва:

$$h_0 = \frac{v_0^2}{2g} = 4500\text{м};$$

2. Скорость осколка в точке выстрела при его свободном падении с высоты h_0

$$v_{\text{сп}} = \sqrt{2gh_0} = 300 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

3. Поскольку скорости осколков у поверхности земли одинаковы

$$v_1 = v_2 = 600 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

то снаряд разорвался на два осколка одинаковой массы: $m_1 = m_2$.

№14

Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна 10 м/с. В точке максимального подъема снаряд разорвался на два осколка, массы которых относятся как 1 : 2. Осколок меньшей массы упал на Землю со скоростью 20 м/с. Определите скорость большего осколка при падении на Землю? Считать поверхность Земли плоской и горизонтальной.

Решение

1. Высота подъёма снаряда в точке его разрыва:

$$h_0 = \frac{v_0^2}{2g};$$

2. Начальная скорость первого осколка определится из условия равенства его кинетической энергии у поверхности сумме потенциальной энергии и кинетической энергии, обусловленной скоростью осколков после разрыва снаряда:

$$\frac{m_1(2v_0)^2}{2} = m_1gh_0 + \frac{m_1v_1^2}{2}; \Rightarrow 4v_0^2 = 2gh_0 + v_1^2;$$

$$v_1 = \sqrt{4v_0^2 - 2gh_0} = \sqrt{4v_0^2 - v_0^2} = v_0\sqrt{3};$$

3. Начальная скорость второго осколка:

$$m_1 v_1 = 2m_1 v_2; \Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{2} = \frac{v_0 \sqrt{3}}{2};$$

4. Скорость второго осколка при его падении на поверхность определится законом сохранения энергии

$$\frac{m_2 u^2}{2} = m_2 g h_0 + \frac{m_2 v_2^2}{2}; \Rightarrow u^2 = 2gh_0 + v_2^2 = v_0^2 + \frac{3v_0^2}{4};$$

$$u = v_0 \frac{\sqrt{7}}{2} = 13,2 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

№15

Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна 10 м/с. В точке максимального подъема снаряд разорвался на два осколка, массы которых относятся как 2 : 1. Осколок большей массы упал на Землю первым со скоростью 20 м/с. На какую максимальную высоту может подняться осколок меньшей массы? Считать поверхность Земли плоской и горизонтальной.

Решение

1. Высота подъема снаряда в точке его разрыва:

$$h_0 = \frac{v_0^2}{2g};$$

2. Начальная скорость первого осколка определится из условия равенства его кинетической энергии у поверхности сумме потенциальной энергии и кинетической энергии, обусловленной скорости осколков после разрыва снаряда:

$$\frac{m_1 (2v_0)^2}{2} = m_1 g h_0 + \frac{m_1 v_1^2}{2}; \Rightarrow 4v_0^2 = 2gh_0 + v_1^2;$$

$$v_1 = \sqrt{4v_0^2 - 2gh_0} = \sqrt{4v_0^2 - v_0^2} = v_0 \sqrt{3};$$

3. Начальная скорость второго осколка:

$$2mv_1 = mv_2; \Rightarrow v_2 = 2v_1 = 2v_0 \sqrt{3};$$

4. Максимальная высота подъема осколка меньшей массы:

$$m_2 g h_{\max} = m_2 g h_0 + \frac{m_2 v_2^2}{2}; \quad h_{\max} = h_0 + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{6v_0^2}{g} = \frac{1}{g} \left(\frac{v_0^2 + 12v_0^2}{2} \right) = \frac{13v_0^2}{2g} = 65 \text{ м};$$

№16

Масса Марса составляет 0,1 от массы Земли, диаметр Марса вдвое меньше диаметра Земли. Чему равно отношение периодов обращения искусственных спутников Марса и Земли $\frac{T_M}{T_Z}$, движущихся по круговым орбитам на небольшой высоте?

Решение

1. Условие нахождения спутника на стационарной круговой орбите:

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}; \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}}; \Rightarrow \omega r = \sqrt{\frac{GM}{r}}; \quad \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}};$$

2. Отношение периодов обращения спутников:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}; \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{(0,5R)^3}{0,1GM}}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}\sqrt{1,25} \approx 1,12;$$

№17

По горизонтальной дороге мальчик тянет сани массой 30 кг за веревку, направленную под углом 60° к плоскости дороги, с силой $F = 100$ Н. Коэффициент трения $\mu = 0,12$. Определите ускорение саней. Каков путь, пройденный санями за 5 с, если в начальный момент их скорость была равна нулю?

1. Если сани, движущиеся прямолинейно, принять за материальную точку, то на неё будет действовать плоская система сходящихся сил:

$$\{\vec{F}; m\vec{g}; \vec{N}; \vec{F}_{\text{тр}}\},$$

геометрическая сумма которых в соответствии со вторым законом Ньютона позволяет определить ускорение:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=4} \vec{F}_i;$$

2. Модуль нормальной реакции связи:

$$N = mg - F \sin \alpha;$$

3. Модуль силы трения:

$$F_{\text{тр}} = \mu(mg - F \sin \alpha);$$

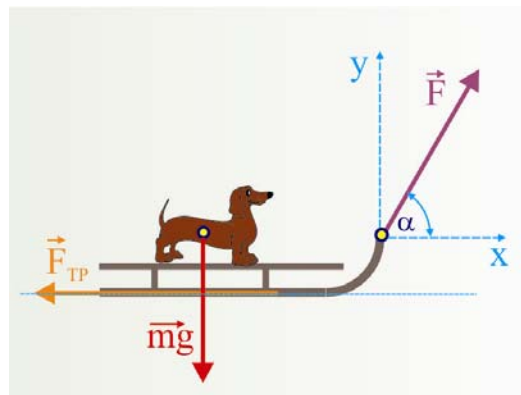
4. Уравнение второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось (на направление возможного перемещения):

$$F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha) = ma; \Rightarrow a = \frac{F \cos \alpha - \mu(mg - F \sin \alpha)}{m};$$

$$a = \frac{100 \cdot 0,5 - 0,12(300 - 100 \cdot 0,87)}{30} = 0,815 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

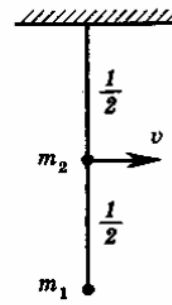
5. Путь, пройденный санями за время $\tau = 5$ с:

$$s = \frac{a\tau^2}{2} = 25\text{м};$$



№18

Грузики с точечными массами $m_1 = 0,25$ кг и $m_2 = 0,5$ кг прикреплены к невесомому стержню длиной $l = 1$ м (см. рисунок). Стержень может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O . Грузик m_2 в нижней точке траектории имеет скорость $v = 2$ м/с. Определите силу, с которой стержень действует на грузик m_1 в этот момент времени.



Решение

1. Стержень вращается вокруг оси, проходящей через точку подвеса перпендикулярно плоскости чертежа с нормальным ускорением пропорциональным квадрату линейной скорости и обратно пропорционально расстоянию ℓ до оси вращения.

2. В соответствии с теоремой Эйлера линейная скорость точечной массы m_1 будет в два раза больше скорости второй точечной массы:

$$v_2 = \omega \frac{\ell}{2}; \quad v_1 = \omega \ell; \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2v_2 = 4 \frac{M}{c};$$

3. Уравнение второго закона Ньютона для точечной массы m_2 :

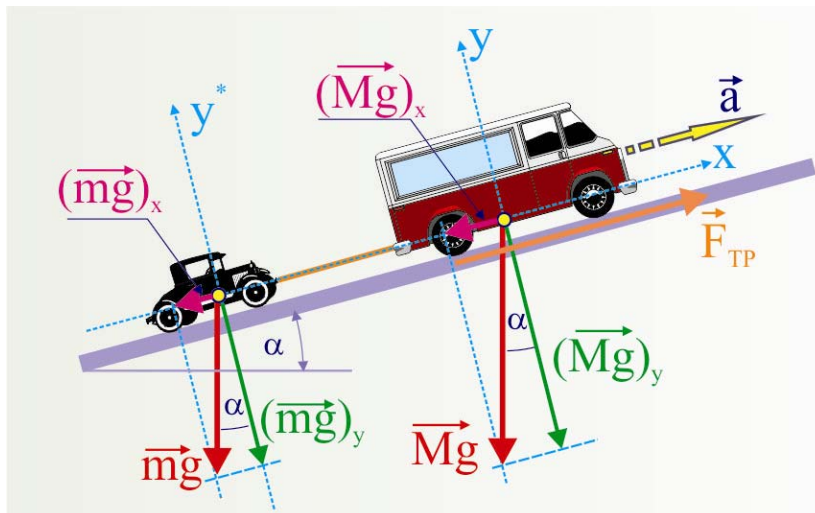
$$a_1 m_1 = T - m_1 g; \quad a_1 = \frac{v_1^2}{\ell} = \frac{4v_2^2}{\ell}; \quad \frac{4m_1 v_2^2}{\ell} = T - m_1 g; \quad T = \frac{4m_1 v_2^2}{\ell} + m_1 g;$$

$$T = m_1 \left(\frac{4v_2^2}{\ell} + g \right) = 0,25(16 + 10) = 6,5 \text{ Н};$$

№19

Грузовой автомобиль массой $M = 4$ т с двумя ведущими осями тянет за нерастяжимый трос вверх по склону легковой автомобиль массой $m = 1$ т, у которого выключен двигатель. С каким максимальным ускорением могут двигаться автомобили, если угол уклона составляет $\alpha = \arcsin 0,1$, а коэффициент трения между шинами грузового автомобиля и дорогой $\mu = 0,2$? Силой трения качения, действующей на легковой автомобиль, пренебречь. Массой колес пренебречь.

Решение



1. Если сцепку автомобилей рассматривать как механическую систему, то все силы, действующие на систему, кроме силы трения, являются внутренними силами. В данном случае сила трения является движущей внешней силой, только она может изменить механическое состояние системы. Внутренние силы состояние системы изменить не могут, потому что в соответствии с третьим законом Ньютона они проявляются попарно и их геометрическая сумма всегда равна нулю.

2. Уравнение второго закона Ньютона в векторной форме

$$\vec{a} = \frac{1}{M + m} \sum_{i=1}^{i=5} \vec{F}_i;$$

3. Уравнение второго закона Ньютона в проекции на направление движения:

$$a(M + m) = \mu Mg \cos \alpha - Mg \sin \alpha - mg \sin \alpha;$$

$$a = g \left\{ \frac{M}{M + m} \mu \cos \alpha - \sin \alpha \right\};$$

4. Угол наклона склона к горизонту:

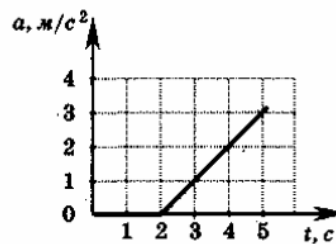
$$\alpha = \arcsin 0,1 \approx 5,74^\circ; \quad \cos \alpha \approx 0,994 \approx 1; \quad \sin \alpha \approx 0,1;$$

5. Предельное значение ускорения:

$$a \approx 10 \left\{ \frac{4}{5} \cdot 0,2 - 0,1 \right\} \approx 0,6 \frac{M}{c^2};$$

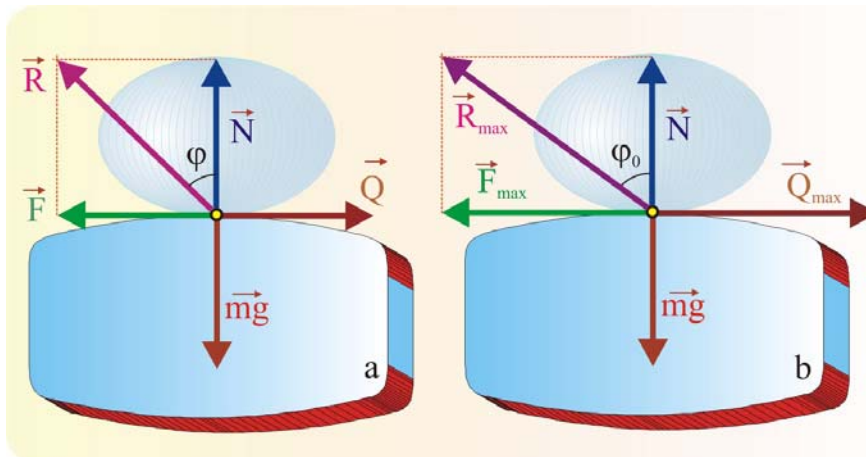
№20

К покоящемуся на шероховатой горизонтальной поверхности телу приложена нарастающая с течением времени горизонтальная сила тяги $F = bt$, где b — постоянная величина. На рисунке представлен график зависимости ускорения тела от времени действия силы. Определите коэффициент трения скольжения.



Решение

1. Пусть на шероховатой поверхности в состоянии относительного покоя находится тело массой m произвольной формы.



Тело на шероховатой поверхности

2. Сила тяжести $m\vec{g}$ в данном случае уравнивается нормальной реакцией связи $\vec{N}$. Если приложить в общей точке поверхности и тела силу $\vec{Q}$, линия действия которой лежит в касательной плоскости, то состояние покоя не нарушится. Это говорит о том, что реакция опорной поверхности не сводится только к $\vec{N}$, если бы это было так, то малая по величине сила $\vec{Q}$ нарушила бы состояние равновесия. На это указывает и повседневный опыт. Чтобы сдвинуть тело с места, нужно приложить силу, превосходящую некоторое значение $\vec{Q}_{\max}$. Таким образом, получается, что помимо нормальной реакции связи к телу приложена ещё одна реакция связи $\vec{F}$, которая называется силой трения скольжения

3. До момента возникновения скольжения тела по плоскости будет иметь место равенство:

$$\vec{F} + \vec{Q} = 0.$$

4. Уравнение, в частности показывает, что величина силы $\vec{F}$ будет изменяться от нуля до некоторого максимального значения $\vec{F}_{\max}$, соответствующего моменту наступления относительного скольжения (рис b). Величина $\vec{F}_{\max}$ является мерой сопротивления скольжению данного тела по поверхности, которая рассматривается в качестве силы трения.

5. Существует три правила, которыми руководствуются при решении прикладных задач, связанных с анализом сил трения:

- Сила трения скольжения направлена всегда в сторону, противоположную возможному относительному перемещению соприкасающихся тел.
- Сила трения скольжения в состоянии покоя не может превосходить по модулю максимального значения $\vec{F}_{\max}$.
- Модуль максимальной силы трения скольжения прямо пропорционален нормальной величине давления одного тела на другое, т.е. нормальной силе реакции связи:

$$F_{\max} = \mu_0 N,$$

где μ_0 – коэффициент трения скольжения в покое. Коэффициент трения представляется безразмерной величиной, зависящей от физических свойств и состояния поверхностей, трущихся поверхностей. Коэффициент трения скольжения, как правило, не зависит от величины нормального давления и площади соприкасающихся поверхностей. Для абсолютно гладких поверхностей коэффициент трения равен нулю. Для всех тел, обладающих реальными физическими свойствами, коэффициент трения скольжения находится в пределах:

$$0 < \mu_0 < 1.$$

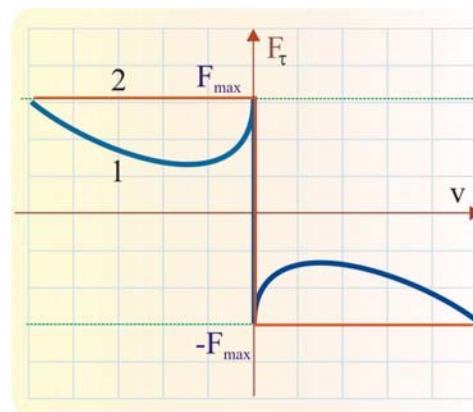
6. Из уравнения следует, что:

$$F \leq F_{\max}, \quad \text{или} \quad F \leq \mu_0 N,$$

знак равенства относится к моменту времени, когда тело будет находиться на грани перемещения. Возвращаясь к рис., необходимо отметить, что суммарная реакция связи шероховатой поверхности изобразится силой $\vec{R}$, которая представляется в виде геометрической суммы нормальной реакции $\vec{N}$ и силы $\vec{F}$. Угол между направлением нормальной реакции $\vec{N}$ и $\vec{R}$, т.е. угол φ , называется углом трения, он будет меняться от нулевого до некоторого максимального значения φ_0 , при этом:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{F_{\max}}{N}, \Rightarrow \mu_0 = \operatorname{tg} \varphi_0;$$

7. Предположим далее, что тело начинает скользить по шероховатой поверхности со скоростью v . При равномерном движении действующая сила Q автоматически уравнивается силой трения. Если равновесия между этими силами нет, движение будет ускоренным. Величина силы трения зависит от скорости, что представлено зависимостью на рис. (кривая 1). График, в частности показывает, что знаки скорости и силы трения всегда противоположны. При равенстве скорости нулю, зависимость вырождается в вертикальную прямую. Сила трения покоя может принимать значения от $F_{\max}$ до $-F_{\max}$. Обсуждаемая закономерность была экспериментально получена Кулоном (1736 – 1806), который установил, что зависимость $F_{\tau} = f(v)$ выражена слабо, т.е. когда не требуется большой точности, то такой зависимостью пренебрегают, в этом случае зависимость принимает вид, представленный на рис. (кривая 2).



Зависимость силы трения от скорости перемещения

8. Из заданного графика зависимости $a = f(t)$ видно, что при $t_1 = 2$ с сила трения имеет максимальное значение:

$$bt_1 = \mu mg; \Rightarrow m = \frac{bt_1}{\mu g};$$

9. При $a > 0$ (тело движется) справедлив второй закон Ньютона, в проекции на направление движения принимающий вид:

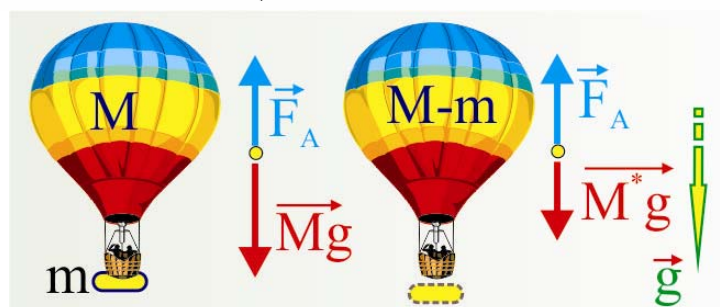
$$ma = bt - \mu mg; \quad \frac{bt_1 a}{\mu g} = bt - \mu g \frac{bt_1}{\mu g}; \quad \frac{t_1 a}{\mu g} = (t - t_1); \quad \mu = \frac{at_1}{g(t - t_1)};$$

10. Поскольку зависимость $a = f(t)$ линейная, то можно выбирать произвольные значения t и соответствующие ему значения ускорения по графику, например $t = 4$ с, $a = 2$ м/с²:

$$\mu = \frac{2 \cdot 2}{10(4 - 2)} = 0,2;$$

№21

Определите массу груза, который нужно сбросить с аэростата массой 1100 кг, движущегося равномерно вниз, чтобы аэростат стал двигаться с такой же по модулю скоростью вверх. Архимедова сила, действующая на аэростат, равна 10^4 Н. Силу сопротивления воздуха при подъеме и спуске считайте одинаковой.



Решение

1. Задачу можно решить, не прибегая к составлению уравнений. Определим изначальный вес аэростата

$$P_0 = Mg \approx 1,1 \cdot 10^4 \text{ Н},$$

при этом, сила Архимеда $F_A = 10^4 \text{ Н}$, при таком раскладе сил аэростат опускается с постоянной скоростью вниз, т.е. разность силы тяжести и силы Архимеда постоянна во времени

$$\Delta F = P_0 - F_A;$$

2. Чтобы аэростат принял состояние безразличного равновесия должно выполняться условие:

$$F_A = P_0;$$

3. Чтобы аэростат остановился нужно уменьшить его массу на величину

$$\Delta m_1 = \frac{\Delta F}{g} = \frac{P_0 - F_A}{g} = 100 \text{ кг};$$

4. Чтобы аэростат начал подниматься со скоростью первоначального спуска, необходимо сбросить с него массу:

$$m = 2\Delta m = 200 \text{ кг};$$

5. Можно воспользоваться системой уравнений второго закона Ньютона:

$$\left. \begin{array}{l} F_A - Mg + mg = 0; \\ F_A - (M - m)g - mg = 0; \end{array} \right\} \Rightarrow F_A - Mg + mg + F_A - Mg - mg - mg = 0;$$

$$2F_A - 2Mg - mg = 0; \Rightarrow m = 2\left(M - \frac{F_A}{g}\right) = 200 \text{ кг};$$

№22

Брусок массой $m_1 = 600 \text{ г}$, движущийся со скоростью 2 м/с , сталкивается с неподвижным бруском массой $m_2 = 200 \text{ г}$. Какой будет скорость первого бруска после столкновения? Удар считать центральным и абсолютно упругим.

Решение

1. Поскольку неизвестны две скорости после удара, по одного уравнения закона сохранения импульса недостаточно, его необходимо дополнить уравнением закона сохранения энергии:

$$\left. \begin{array}{l} m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2; \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}; \end{array} \right\}$$

если из первого уравнения выразить u_2 и подставить во второе уравнение, то получим:

$$u_1^2 + u_1 \frac{2m_2 v_1}{m_1 + m_2} - v_1^2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0; \Rightarrow u_1^2 + u - 2 = 0; \quad u_1 = -0,5 \pm \sqrt{0,25 + 2} = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

№23

Шарик скользит без трения по наклонному желобу, а затем движется по «мертвой петле» радиуса R . С какой силой шарик давит на желоб в нижней точке петли, если масса шарика равна 100 г, а высота, с которой его отпускают, равна $4R$?

Решение

1. Проще всего задачу решать, используя принцип Даламбера, который заключается в том, что если к телу, движущемуся криволинейно к активным ньютоновским силам добавить фиктивные силы инерции, то тело можно условно рассматривать как неподвижное.

2. В рассматриваемом случае шарик после спуска с высоты $h = 4R$ движется по круговой траектории вокруг оси z , проходящей перпендикулярно плоскости чертежа через центр кругового желоба, что даёт возможность к плоской системе двух сходящихся активных сил $\{\vec{N}, m\vec{g}\}$, добавить силу инерции

$$|\vec{F}_i| = m |\vec{a}_n| = \frac{mv_0^2}{2},$$

имеющую направление противоположное вектору нормального (центростремительного) ускорения.

3. Уравнение, описывающее состояния шарика, в проекции на вертикальную ось, примет вид:

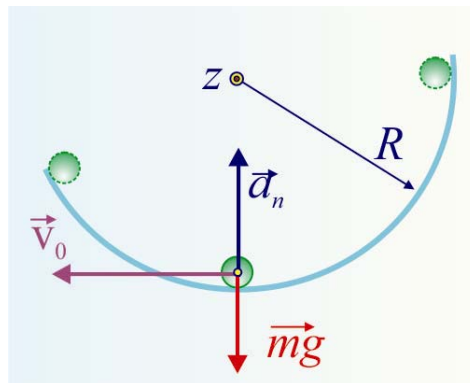
$$N - mg = \frac{mv_0^2}{R};$$

4. Скорость шарика при движении без сопротивления и трения по желобу определяется законом сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh = 4mgR; \Rightarrow v_0^2 = 8gR;$$

5. Сила давления шарика на опору, проявляющаяся в виде реакции связи N определяется как:

$$N = mg + \frac{m}{R}8gR = mg + 8mg = 9mg = 9H;$$



№24

Брусок массой $m_1 = 600$ г, движущийся со скоростью 2 м/с, сталкивается с неподвижным бруском массой $m_2 = 200$ г. Какова скорость второго бруска после столкновения? Удар считать центральным и абсолютно упругим.

Решение

1. Поскольку неизвестны две скорости после удара, по одного уравнения закона сохранения импульса недостаточно, его необходимо дополнить уравнением закона сохранения энергии:

$$\left. \begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 u_1 + m_2 u_2; \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} &= \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}; \end{aligned} \right\}$$

если из первого уравнения выразить u_1 и подставить во второе уравнение, то получим:

$$u_2^2 + u_2 \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} - v_1^2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0; \Rightarrow u_1^2 + 3u - 2 = 0; \quad u_1 = 1,5 \pm \sqrt{2,25 + 2} \approx 3,5 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

№25

Два шарика, массы которых 200 г и 600 г, висят, соприкасаясь, на одинаковых нитях длиной 80 см. Первый шар отклонили на угол 90° и отпустили. На какую высоту поднимутся шарики после удара, если этот удар абсолютно неупругий?

Решение

1. Скорость первого шарика в момент удара:

$$mg\ell = \frac{mv_1^2}{2}; \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\ell};$$

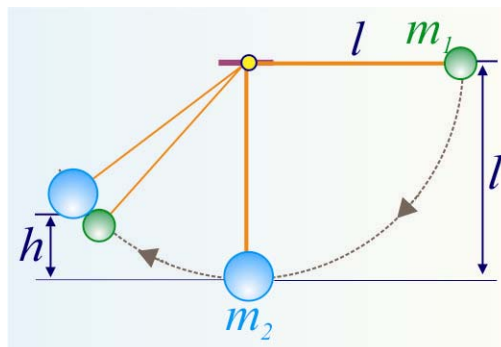
2. Скорость совместного движения шаров после их неупругого столкновения:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)u; \quad u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2};$$

3. Высота подъёма центра масс шаров после удара:

$$\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = (m_1 + m_2)gh; \Rightarrow h = \frac{u^2}{2g} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \ell;$$

$$h = \left(\frac{0,2}{0,8} \right)^2 \cdot 0,8 = 0,05 \text{ м} = 5 \text{ см};$$



№26

От удара копра массой 450 кг, падающего свободно с высоты 5 м, свая массой 150 кг погружается в грунт на 10 см. Определите силу сопротивления грунта, считая ее постоянной, а удар — абсолютно неупругим. Изменением потенциальной энергии сваи пренебречь.

Решение

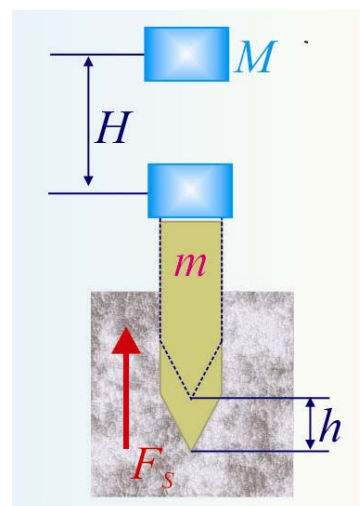
1. Скорость копра перед ударом о сваю определяется законом сохранения импульса:

$$MgH = \frac{Mv_1^2}{2}; \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gH};$$

2. Скорость опускания сваи в грунт:

$$M\sqrt{2gH} = (M + m)u; \Rightarrow u = \frac{M\sqrt{2gH}}{M + m};$$

3. Кинетическая энергия сваи с копром расходуется на совершение работы против силы сопротивления грунта:



$$Fh = \frac{(M+m)u^2}{2} = F_s h; \Rightarrow F_s = \frac{(M+m)}{2h} \frac{M^2 2gH}{(M+m)^2} = \frac{H}{h} \frac{M^2 g}{M+m};$$

$$F_s = 50 \frac{2,025 \cdot 10^4}{600} \approx 168,7 \text{ кН};$$

№27

На одном конце тележки длиной $l = 5$ м стоит человек массой $m = 40$ кг. Масса тележки $M = 60$ кг. На какое расстояние относительно пола передвинется тележка, если человек перейдет с постоянной скоростью на другой ее конец? (Массой колес и трением пренебречь.)

Решение

1. Представим скорости перемещения человека и лодки в предположении равномерности движения

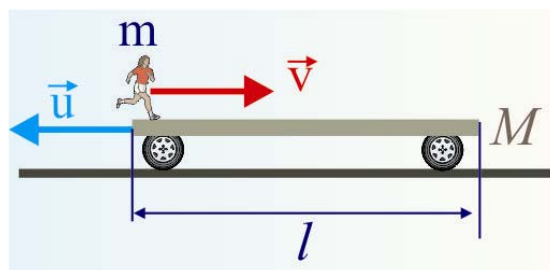
$$v = \frac{L}{\Delta t}; \quad u = \frac{s}{\Delta t},$$

где Δt – время движения человека, s – перемещение лодки в спокойной воде.

2. Запишем закон сохранения импульса системы «лодка – человек» в проекции на горизонтальную ось, направление которой совпадает с направлением движения человека

$$\frac{s(M+m)}{\Delta t} = \frac{mL}{\Delta t}; \quad s = \frac{mL}{M+m} = \frac{40 \cdot 5}{45} = 1 \text{ м};$$

3. Перемещение лодки не может превосходить её длину, т.к. при горизонтальном перемещении человека центр масс системы сохраняет своё положение и не может находиться за пределами длины лодки.



№28

Тяжелый мячик отпустили без начальной скорости с высоты $H = 20$ м, при ударе о землю он потерял часть своей кинетической энергии и долетел до верхней точки через $t = 3$ с после начала движения. Какая часть кинетической энергии перешла в тепло при ударе? Сопротивлением воздуха при расчетах пренебречь.

Решение

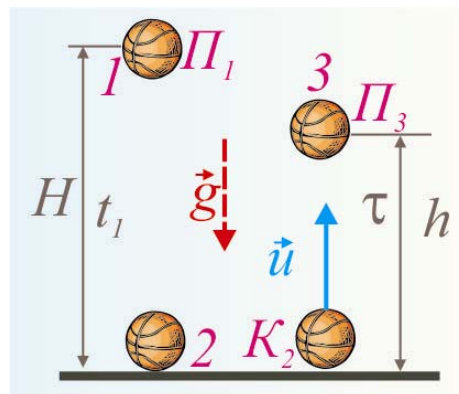
1. Время падения мяча с высоты H без учёта сопротивления:

$$H = \frac{gt_1^2}{2}; \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}};$$

2. Время подъёма тела после удара о землю:

$$\tau = t - t_1 = t - \sqrt{\frac{2H}{g}};$$

3. Поскольку время подъёма равно времени спуска, то начальная скорость отскока мяча определится как:



$$u = g\tau;$$

4. Кинетическая энергия мяча сразу после отскока:

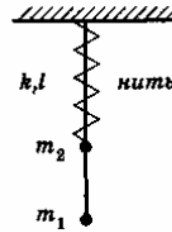
$$K_2 = \frac{mu^2}{2};$$

5. Доля потерянной мячом энергии в процессе не совсем упругого удара о поверхность:

$$\xi = \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Pi_1 - K_2}{\Pi_1} = 1 - \frac{K_2}{\Pi_1} = 1 - \frac{mu^2}{2mgH} = 1 - \frac{g\tau^2}{2H} = 1 - \frac{10}{40} = 0,75;$$

№29

Материальные точки массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г соединены невесомым стержнем, как показано на рисунке. К точке m_2 прикреплена невесомая пружина жесткостью $k = 30$ Н/м, верхний конец которой закреплен. Длина пружины в недеформированном состоянии $\ell_0 = 20$ см. В начальный момент концы пружины связаны нитью длиной $l = 10$ см. Определите силу реакции стержня, действующую на массу m_1 сразу после пережигания нити.



Решение

1. При освобождении пружины на систему "грузы-стержень" действует система четырех вертикальных сил:

$$\{m_1\vec{g}; m_2\vec{g}; \vec{F}_k; \vec{T}\},$$

при этом сила упругости F_k

$$F_k = k(\ell_0 - \ell);$$

2. При стремлении пружины занять недеформированное состояние стержень с грузами будет двигаться вниз с ускорением

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 + m_2)g + k(\ell_0 - \ell);$$

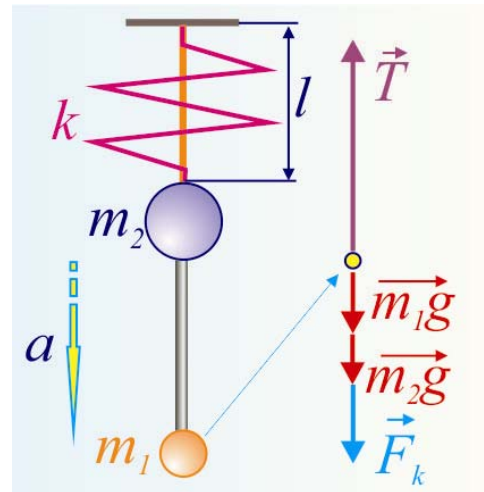
$$a = g + \frac{k(\ell_0 - \ell)}{m_1 + m_2};$$

3. Ускоренное движение груза m_1 описывается уравнением:

$$m_1 a = m_1 g + T,$$

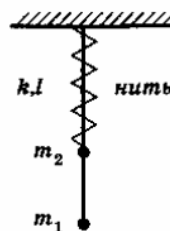
откуда:

$$T = m_1(a - g) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} k(\ell_0 - \ell) = \frac{0,1}{0,3} 30 \cdot 0,1 = 1 \text{ Н};$$



№30

Материальные точки массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г соединены невесомым стержнем, как показано на рисунке. К точке m_2 прикреплена невесомая пружина жесткостью $k = 30$ Н/м, верхний конец которой закреплен. Длина пружины в недеформированном состоянии $\ell_0 = 20$ см. В начальный момент концы пружины связаны нитью длиной $l = 10$ см. Определите силу реакции стержня, действующую на точку массой m_2 сразу после пережигания нити.



Решение

1. При освобождении пружины на систему "грузы-стержень" действует система четырёх вертикальных сил:

$$\{m_1 \vec{g}; m_2 \vec{g}; \vec{F}_k; \vec{T}\},$$

при этом сила упругости F_k

$$F_k = k(\ell_0 - \ell);$$

2. При стремлении пружины занять недеформированное состояние стержень с грузами будет двигаться вниз с ускорением

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 + m_2)g + k(\ell_0 - \ell);$$

$$a = g + \frac{k(\ell_0 - \ell)}{m_1 + m_2};$$

3. Ускоренное движение груза m_2 описывается уравнением:

$$m_2 a = m_2 g + T,$$

откуда:

$$T = m_2(a - g) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} k(\ell_0 - \ell) = \frac{0,2}{0,3} 30 \cdot 0,1 = 2 \text{ Н};$$

Молекулярная физика и термодинамика

№1

Воздушный шар объемом 2500 м^3 с массой оболочки 400 кг имеет внизу отверстие, через которое воздух в шаре нагревается горелкой. До какой минимальной температуры нужно нагреть воздух в шаре, чтобы шар взлетел вместе с грузом (корзиной и воздухоплавателем) массой 200 кг ? Температура окружающего воздуха 7°C , его плотность $1,2 \text{ кг/м}^3$. Оболочку шара считать нерастяжимой.

Решение

1. Условие безразличного равновесия воздушного шара в воздухе:

$$\rho_2 g V = (m_1 + m_2)g + m_3 g,$$

где m_1 – масса оболочки, m_2 – масса корзины с аэронавтами, m_3 – масса воздуха в оболочке

$$m_3 = \rho_1 V,$$

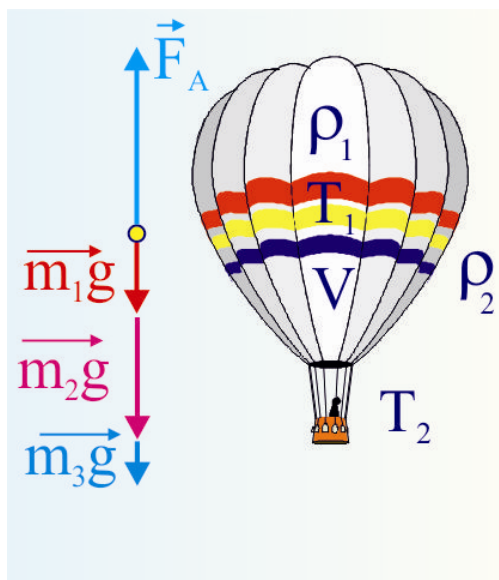
ρ_1 – плотность нагретого горелкой воздуха.

2. Плотность воздуха внутри шара:

$$\rho_1 = \rho_2 - \frac{m_1 + m_2}{V} \approx 1,2 - \frac{600}{2500} \approx 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

3. Температура, при которой достигается плотность ρ_1 :

$$T_1 \approx \frac{p_0 \mu}{\rho_1 R} \approx \frac{10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 8,3} \approx 349 \text{ K};$$



№2

Воздушный шар объемом 2500 м^3 с массой оболочки 400 кг имеет внизу отверстие, через которое воздух в шаре нагревается горелкой. Рассчитайте максимальную массу груза, который может поднять шар, если воздух в нем нагреть до температуры 77°C . Температура окружающего воздуха 7°C , его плотность $1,2 \text{ кг/м}^3$. Оболочку шара считать нерастяжимой.

Решение

1. Условие безразличного равновесия воздушного шара в воздухе (см. задачу №1):

$$\rho_2 g V = (m_1 + m_2)g + m_3 g; \quad (m_1 + m_2) = V(\rho_2 - \rho_1)$$

где – m_1 – масса оболочки, m_2 – масса корзины с аэронавтами, m_3 – масса воздуха внутри оболочки

$$m_3 = \rho_1 V,$$

ρ_1 – плотность нагретого горелкой воздуха внутри шара.

2. Плотность воздуха внутри шара:

$$\rho_1 = \rho_2 - \frac{m_1 + m_2}{V} \approx 1,2 - \frac{600}{2500} \approx 0,96 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

3. Масса, которую может поднять шар при заданных условиях:

$$\rho_2 V = (m_1 + m_2) + m_3 g, \Rightarrow m_2 = \rho_2 V - m_1 - \rho_1 V = V(\rho_2 - \rho_1) - m_1;$$

$$m_2 \approx 2,5 \cdot 10^3 \cdot 0,24 - 400 \approx 200 \text{ кг};$$

№3

Воздушный шар объемом 2500 м³ имеет внизу отверстие, через которое воздух в шаре нагревается горелкой. Если температура окружающего воздуха 7°С, а его плотность 1,2 кг/м³, то при нагревании воздуха в шаре до температуры 77°С шар поднимает груз с максимальной массой 200 кг. Какова масса оболочки шара? Оболочку шара считать нерастяжимой.

Решение

1. Условие безразличного равновесия воздушного шара в воздухе (см. задачи №1,2):

$$\rho_2 g V = (m_1 + m_2) g + m_3 g; \quad (m_1 + m_2) = V(\rho_2 - \rho_1)$$

где – m_1 – масса оболочки, m_2 – масса корзины с аэронавтами, m_3 – масса воздуха внутри оболочки

$$m_3 = \rho_1 V,$$

ρ_1 – плотность нагретого горелкой воздуха внутри шара.

2. Плотность воздуха внутри шара:

$$\rho_1 = \rho_2 - \frac{m_1 + m_2}{V} \approx 1,2 - \frac{600}{2500} \approx 0,96 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

3. Масса, которую может поднять шар при заданных условиях:

$$\rho_2 V = (m_1 + m_2) + m_3 g, \Rightarrow m_1 = \rho_2 V - m_2 - \rho_1 V = V(\rho_2 - \rho_1) - m_2;$$

$$m_1 \approx 2,5 \cdot 10^3 \cdot 0,24 - 200 \approx 400 \text{ кг};$$

№4

Воздушный шар имеет газонепроницаемую оболочку массой 400 кг и содержит 100 кг гелия. Какой груз он может удерживать в воздухе на высоте, где температура воздуха 17°С, а давление 10⁵ Па? Считать, что оболочка шара не оказывает сопротивления изменению объема шара.

Решение

1. Плотность гелия ρ_1 при заданной температуре $T = 290 \text{ К}$ и давлении $p = 10^5 \text{ Па}$:

$$\rho_1 = \frac{p_0 \mu_{\text{He}}}{RT} \approx 0,166 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

2. Плотность окружающего шар воздуха при таких же условиях:

$$\rho_2 = \frac{p_0 \mu_B}{RT} \approx 1,2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

3. Условие безразличного равновесия воздушного шара:

$$(m_0 + m_\Gamma)g = (\rho_2 - \rho_1)V; \quad V = \frac{m_{\text{He}}}{\rho_1}; \quad \Rightarrow \quad m_\Gamma = \frac{\Delta \rho m_{\text{He}}}{\rho_1} - m_0;$$

$$m_\Gamma = \frac{1,034 \cdot 100}{0,166} - 400 \approx 223 \text{ кг};$$

№5

Воздушный шар с газонепроницаемой оболочкой массой 400 кг заполнен гелием. Он может удерживать в воздухе на высоте, где температура воздуха 17°C, а давление 10⁵ Па, груз массой 225 кг. Какова масса гелия в оболочке шара? Считать, что оболочка шара не оказывает сопротивления изменению объема шара.

Решение

1. Плотность гелия ρ_1 при заданной температуре $T = 290 \text{ К}$ и давлении $p = 10^5 \text{ Па}$:

$$\rho_1 = \frac{p_0 \mu_{\text{He}}}{RT} \approx 0,166 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

2. Плотность окружающего шар воздуха при таких же условиях:

$$\rho_2 = \frac{p_0 \mu_B}{RT} \approx 1,2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3};$$

3. Условие безразличного равновесия воздушного шара:

$$(m_0 + m_\Gamma)g = (\rho_2 - \rho_1)V; \quad V = \frac{m_{\text{He}}}{\rho_1}; \quad \Rightarrow \quad m_\Gamma = \frac{\Delta \rho m_{\text{He}}}{\rho_1} - m_0;$$

$$m_{\text{He}} = \frac{\rho_1(m_0 + m_\Gamma)}{\rho_2 - \rho_1} \approx \frac{0,166 \cdot 625}{1,034} \approx 100 \text{ кг};$$

№6

В вакууме закреплен горизонтальный цилиндр. В цилиндре находится гелий в количестве 0,1 моль, запертый поршнем. Поршень удерживается упорами и может скользить влево вдоль стенок цилиндра без трения. В поршень попадает пуля массой 10 г, летящая горизонтально со скоростью 400 м/с, и застревает в нем. Температура гелия в момент остановки поршня в крайнем левом положении возрастает на 64 К. Какова масса поршня? Считать, что за время движения поршня газ не успевает обменяться теплом с поршнем и цилиндром.

Решение

1. Изменение температуры гелия, содержащегося под поршнем, свидетельствует об изменении его внутренней энергии. Изменение внутренней энергии происходит вследствие движения поршня, который, в свою очередь получает дополнительную энергию при попадании в поршень пули. В виду отсутствия тепловых и механиче-

ских потерь возможно для анализа процессов использовать законы сохранения энергии и импульса.

2. Скорость поршня после попадания в него пули:

$$mv = (M + m)u;$$

$$u = \frac{mv}{M + m};$$

3. Изменение внутренней энергии гелия (идеальный одноатомный газ с $i = 3$) при максимальном смещении поршня влево, когда изменение его температуры достигает величины ΔT :

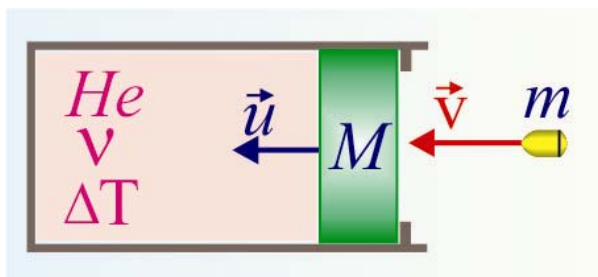
$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} \nu R \Delta T;$$

4. В соответствии с законом сохранения энергии кинетическая энергия поршня трансформируется в изменение внутренней энергии гелия:

$$\frac{(M + m)u^2}{2} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T; \Rightarrow \frac{(M + m)}{2} \frac{(mv)^2}{(M + m)^2} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T; \quad \frac{(mv)^2}{M + m} = 3 \nu R \Delta T;$$

5. Масса поршня:

$$M = \frac{(mv)^2}{3 \nu R \Delta T} - m \approx \frac{16}{159,4} - 0,01 \approx 0,09 \text{ кг} \approx 9 \text{ г};$$



№7

В вакууме закреплен горизонтальный цилиндр. В цилиндре находится гелий в количестве 0,1 моль, запертый поршнем. Поршень массой 90 г удерживается упорами и может скользить влево вдоль стенок цилиндра без трения. В поршень попадает пуля массой 10 г, летящая горизонтально со скоростью 400 м/с, и застревает в нем. Как изменится температура гелия в момент остановки поршня в крайнем левом положении? Считать, что за время движения поршня газ не успевает обмениваться теплом с сосудом и поршнем.

Решение

1. Как было показано в предыдущей задаче, скорость поршня после попадания в него пули определяется как:

$$mv = (M + m)u;$$

$$u = \frac{mv}{M + m};$$

2. Изменение внутренней энергии гелия (идеальный одноатомный газ с $i = 3$) при максимальном смещении поршня влево, когда изменение его температуры достигает величины ΔT :

$$\Delta U = \frac{i}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} \nu R \Delta T;$$

3. В соответствии с законом сохранения энергии кинетическая энергия поршня трансформируется в изменение внутренней энергии гелия:

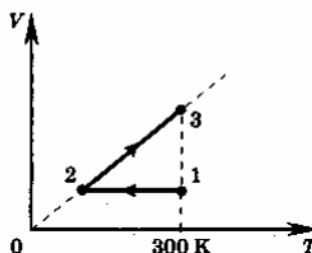
$$\frac{(M+m)u^2}{2} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T; \Rightarrow \frac{(M+m)}{2} \frac{(mv)^2}{(M+m)^2} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T; \frac{(mv)^2}{M+m} = 3 \nu R \Delta T;$$

5. Изменение температуры гелия после сжатия:

$$\Delta T = \frac{m^2 v^2}{3 \nu R (m+M)} \approx \frac{16}{0,249} \approx 64,25 \text{ K}$$

№8

Одноатомный идеальный газ в количестве 10 моль сначала охладил, уменьшив давление в 3 раза, а затем нагрел до первоначальной температуры 300 К (см. рисунок). Какое количество теплоты получил газ на участке 2—3?



Решение

1. На участке $2 \rightarrow 3$ давление остаётся постоянным (изобарный процесс), изменяется занимаемый газом объём и его температура. Процесс получения теплоты от внешнего источника сопровождается изменением внутренней энергии и совершением работы (что определяется первым началом термодинамики):

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} + A_{2 \rightarrow 3};$$

2. Изменение температуры определится как:

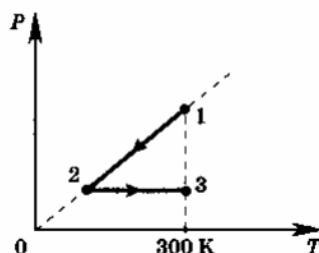
$$\left. \begin{aligned} p_1 V &= \nu R T_1; \\ \frac{p_1}{3} V &= \nu R T_2; \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{3} = 100 \text{ K}; \quad \Delta T = 200 \text{ K};$$

3. Количество полученного газом теплоты:

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \nu R \Delta T \approx 2,5 \cdot 10 \cdot 8,3 \cdot 200 \approx 41,5 \cdot 10^4 \text{ Дж};$$

№9

Идеальный одноатомный газ в количестве 1 моль сначала охладил, а затем нагрел до первоначальной температуры 300 К, увеличив объём газа в 3 раза (см. рисунок). Какое количество теплоты отдал газ на участке 1—2?



Решение

1. Изменение состояния $1 \rightarrow 2$ представляет собой изохорный процесс, работа не совершается, внутренняя энергия газа трансформируется в теплоту. В соответствии с первым началом термодинамики:

$$\Delta V = 0; \Rightarrow \delta A_{1 \rightarrow 2} = 0; \quad Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T;$$

2. Изменение температуры определится из условия изобарности процесса $1 \rightarrow 2$

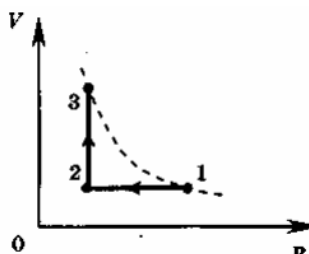
$$V_2 = \frac{V_3}{3}; \Rightarrow T_2 = \frac{T_3}{3}; \Rightarrow \Delta T = 200\text{K};$$

3. Количество тепла, отданное газом:

$$Q_{1 \rightarrow 2} \approx \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 8,3 \cdot 200 \approx 2490 \text{ Дж};$$

№10

Идеальный одноатомный газ в количестве 10 моль охладили, уменьшив давление в 3 раза. Затем газ нагрели до первоначальной температуры 300 К (см. рисунок). Какое количество теплоты сообщено газу на участке 2—3?



Решение

1. Точки процесса 1 и 3 располагаются на изотерме:

$$T_1 = T_3 = 300\text{K};$$

2. Переход 1 → 2 представляет собой изохору, что позволяет определить разность температур $\Delta T = T_3 - T_2$

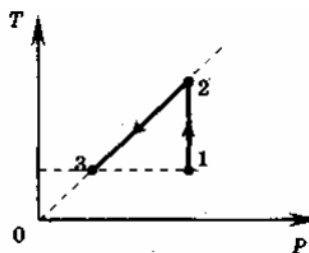
$$T_2 = \frac{T_1}{3} = 100\text{K}; \quad \Delta T = 200\text{K};$$

3. При переходе 2 → 3, в полном соответствии с первым началом термодинамики, совершается работа и изменяется внутренняя энергия газа:

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} + \delta A_{2 \rightarrow 3} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \nu R \Delta T \approx 2,5 \cdot 10 \cdot 8,3 \cdot 200 \approx 51,5 \text{ кДж};$$

№11

Один моль идеального одноатомного газа сначала нагрели, а затем охладили до первоначальной температуры 300 К, уменьшив давление в 3 раза (см. рисунок). Какое количество теплоты сообщено газу на участке 1—2?



Решение

1. Для состояний 2, 3, лежащих на изохоре справедливы уравнения:

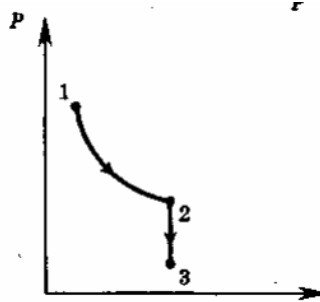
$$\left. \begin{aligned} pV &= \nu RT_1; \\ \frac{p}{3}V &= \nu RT_2; \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_2 = 3T_1; \Rightarrow \Delta T = T_2 - T_3 = 600\text{K};$$

2. В соответствии с первым началом термодинамики сообщаемая газу теплота в течении изобарного перехода 1 → 2 расходуется на изменение внутренней энергии газа и на совершение работы:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} + \delta A_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T + \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \nu R \Delta T \approx 2,5 \cdot 1 \cdot 8,3 \cdot 600 \approx 12,45 \text{ кДж};$$

№12

Один моль идеального одноатомного газа сначала изотермически расширился ($T_1 = 300 \text{ К}$). Затем газ охладили, понизив давление в 3 раза (см. рисунок). Какое количество теплоты отдал газ на участке 2—3?



Решение

1. Участок $1 \rightarrow 2$ представляет собой изотерму, $2 \rightarrow 3$ – изохору, на участке $2 \rightarrow 3$ работы не производится ($\delta A_{2 \rightarrow 3} = 0$) отданная газом теплота является следствием уменьшения его внутренней энергии

$$\delta Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T;$$

2. Изменение температуры при переходе: $2 \rightarrow 3$:

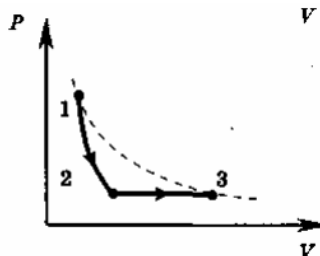
$$\left. \begin{aligned} pV &= \nu RT_2; \\ \frac{p}{3}V &= \nu RT_3; \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_2 = 3T_3; \Rightarrow \Delta T = T_2 - T_3 = 200 \text{ К};$$

3. Отданное газом на участке $2 \rightarrow 3$ тепло:

$$\delta Q_{2 \rightarrow 3} \approx 1,5 \cdot 1 \cdot 8,3 \cdot 200 \approx 2490 \text{ Дж};$$

№13

Идеальный одноатомный газ расширяется сначала адиабатно, а затем изобарно. Конечная температура газа равна начальной (см. рисунок). За весь процесс $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ газом совершена работа, равная 5 кДж. Какую работу совершил газ при изобарном расширении?



Решение

1. Заданная по условию задачи работа складывается из двух слагаемых:

$$A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} = A_{1 \rightarrow 2} + A_{2 \rightarrow 3};$$

2. Адиабатический процесс $1 \rightarrow 2$ характеризуется отсутствием теплообмена с внешней средой, поэтому работа на этом участке производится газом за счёт уменьшения внутренней энергии:

$$A_{1 \rightarrow 2} = -\Delta U_{1 \rightarrow 2}; \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1); \quad T_1 = T_3; \Rightarrow A_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_2);$$

3. Переход $2 \rightarrow 3$ протекает по изобарной схеме:

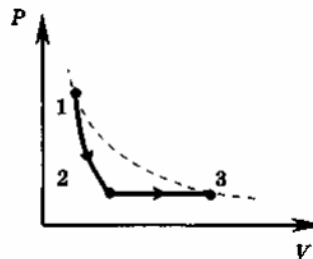
$$A_{2 \rightarrow 3} = \nu R (T_3 - T_2);$$

4. Примем $A_{2 \rightarrow 3}$ за единицу, в этом случае:

$$A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} = A_{2 \rightarrow 3} + 1,5 A_{2 \rightarrow 3} = 2,5 A_{2 \rightarrow 3} \Rightarrow A_{2 \rightarrow 3} = \frac{5}{2,5} = 2 \text{ Дж};$$

№14

Идеальный одноатомный газ расширяется сначала адиабатно, а затем изобарно. Конечная температура газа равна начальной (см. рисунок). При адиабатном расширении газ совершил работу, равную 3 кДж. Какова работа газа за весь процесс 1—2—3?



Решение

1. Заданная по условию задачи работа складывается из двух слагаемых:

$$A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} = A_{1 \rightarrow 2} + A_{2 \rightarrow 3};$$

2. Адиабатический процесс 1→2 характеризуется отсутствием теплообмена с внешней средой, поэтому работа на этом участке производится газом за счёт уменьшения внутренней энергии:

$$A_{1 \rightarrow 2} = -\Delta U_{1 \rightarrow 2}; \quad \Delta U_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1); \quad T_1 = T_3; \quad \Rightarrow \quad A_{1 \rightarrow 2} = \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_2);$$

3. Переход 2→3 протекает по изобарной схеме:

$$A_{2 \rightarrow 3} = \nu R (T_3 - T_2);$$

4. Примем $A_{2 \rightarrow 3}$ за единицу, в этом случае:

$$A_{1 \rightarrow 2} = 3 \text{ Дж}; \quad \Rightarrow \quad A_{2 \rightarrow 3} = \frac{A_{1 \rightarrow 2}}{1,5} = 2 \text{ Дж}; \quad A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} = 3 + 2 = 5 \text{ Дж};$$

№15

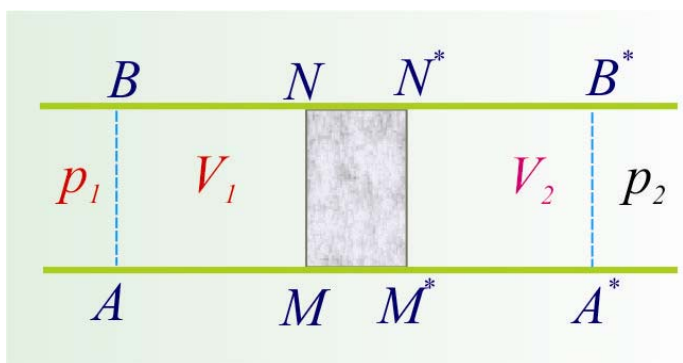
В цилиндре, закрытом подвижным поршнем, находится воздух. Во время опыта и объём воздуха в цилиндре, и его абсолютную температуру увеличили в 2 раза. Оказалось, однако, что воздух мог просачиваться сквозь зазор вокруг поршня, и за время опыта его давление в цилиндре не изменилось. Во сколько раз изменилась внутренняя энергия воздуха в цилиндре? (Воздух считать идеальным газом.)

Решение

1. Внутренняя энергия идеального газа является функцией его состояния:

$$U = f(p, V, T)$$

влияние отдельных макропараметров на величину внутренней энергии опытным путём установили Джоуль и Томсон на установке состоящей из цилиндрической теплоизолированной



трубы. Внутри трубы, между металлическими сетками MN и M*N* размещался объём, заполненный плотной ватой или очёсами шёлка. Исследуемый газ под действием изменяющегося давления медленно продавливался через пористый объём. Благодаря

наличию своеобразной пористой пробки перетекание газа протекало в ламинарном режиме. Кроме того, медленное течение газа обеспечивало возможность пренебречь изменением кинетической энергии молекул, которая, как известно пропорциональна квадрату скорости. Эти обстоятельства обеспечивали термодинамическое равновесие газа по обе стороны пробки. Наличие теплоизоляции делало процесс адиабатическим. Давления газа по обе стороны пробки поддерживались постоянными. По обе стороны пробки устанавливаются температуры T_1 и T_2 . Измерение этих температур было основной целью эксперимента.

2. Выделим мысленно объём газа $ABMN$, который, пройдя через пористый фильтр, займёт положение $M^*N^*B^*A^*$, при этом газом будет произведена работа

$$A_1 = p_1 S \Delta M; \quad A_2 = p_2 S \Delta N^*;$$

Поскольку газом извне теплоты не получается, то работа совершается за счёт внутренней энергии

$$U_1 - U_1 + A = 0; \Rightarrow U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2; \quad I_1 = I_2;$$

Другими словами в этом процессе (имени Томсона) энтальпия газа (энергосодержание) не изменяется. Было установлено, что температуры T_1 и T_2 были одинаковыми, причём наиболее точно равенство соблюдалось для водорода, который наиболее близок к модели идеального газа

$$U(T, V_1) = U(T, V_2);$$

Таким образом, было установлено, что внутренняя энергия идеального газа не является функцией объёма, а определяется только его температурой

$$U = f(T);$$

3. В рассматриваемой задаче изменение объёма никак не сказывается на изменении внутренней энергии газа, а повышение абсолютной температуры в два раза приведёт к возрастанию внутренней энергии тоже только в два раза

$$U_2 = 2U_1;$$

№16

В сосуде с небольшой трещиной находится воздух, который может просачиваться сквозь трещину. Во время опыта давление воздуха в сосуде возросло в 2 раза, а его абсолютная температура уменьшилась в 4 раза при неизменном объеме. Во сколько раз изменилась внутренняя энергия воздуха в сосуде? (Воздух считать идеальным газом.)

Решение

1. На основании закономерностей поведения идеального газа, рассмотренных в предыдущей задаче, внутренняя энергия газа уменьшится в два раза

$$U_2 = \frac{U_1}{2};$$

№17

В цилиндре, закрытом подвижным поршнем, находится газ, который может просачиваться сквозь зазор вокруг поршня. В опыте по изотермическому сжатию газа его объем уменьшился вдвое, а давление газа упало в 3 раза. Во сколько раз изменилась внутренняя энергия газа в цилиндре? (Газ считать идеальным.)

Решение

1. Поскольку в соответствии с уравнением Клапейрона-Менделеева произведение давления на объём, имея размерность энергии может отождествляться либо с работой либо, собственно, с энергией, то:

$$pV \sim \nu T \sim U,$$

уменьшение одновременно и давления и объёма при неизменной температуре приведёт к уменьшению внутренней энергии газа в шесть раз

$$U_2 = \frac{U_1}{6};$$

№18

Зеркальце гальванометра подвешено на кварцевой нити. На зеркальце падает узкий параллельный луч света и, отражаясь от него, попадает на экран, расположенный на расстоянии $L = 20$ м от зеркальца. Температура воздуха 300 К. Оцените, на сколько увеличится радиус светового пятна на экране в результате теплового движения зеркальца, если при повороте зеркальца на угол φ на него со стороны нити действует момент сил $M = -k\varphi$, где коэффициент упругости нити $k = 1,38 \cdot 10^{-15}$ Н·м. Как изменится ответ, если температуру воздуха понизить до 100 К?

Решение

1. Тепловая энергия, приобретаемая зеркальцем, расходуется на работу по закручиванию нити подвеса. При повороте зеркальца на угол $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ работа определится как

$$A = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} k\varphi d\varphi = - \frac{k\varphi^2}{2} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = - \frac{k\Delta\varphi^2}{2}.$$

2. Зеркальце может совершать только вращательное движение вокруг вертикальной оси, поэтому имеет одну степень свободы, на эту степень свободы приходится энергия

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} k_B T = \frac{1}{2} k_B T.$$

3. В соответствии с законом сохранения энергии, уравнения можно приравнять, т.е.

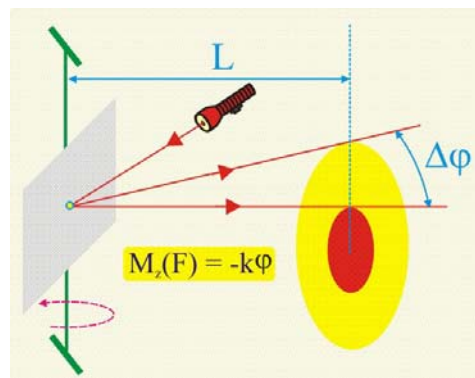
$$\frac{1}{2} k_B T_1 = \frac{k\Delta\varphi^2}{2} \Rightarrow \Delta\varphi_1 = \sqrt{\frac{k_B T_1}{k}} \cong 1,74 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

4. Линейное смещение луча на расстоянии L от центра зеркальца определится из геометрических соображений как длина дуги окружности

$$\Delta\ell_1 = \Delta\varphi_1 L \cong 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ м, } \Delta r_1 = 2\Delta\ell_1 \cong 7 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

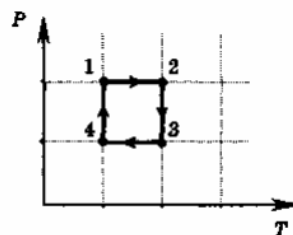
5. При уменьшении температуры воздуха до $T_2 = 100$ К радиус светового пятна увеличится на

$$\Delta r_2 = 2L \sqrt{\frac{k_B T_2}{k}} \cong 4 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$



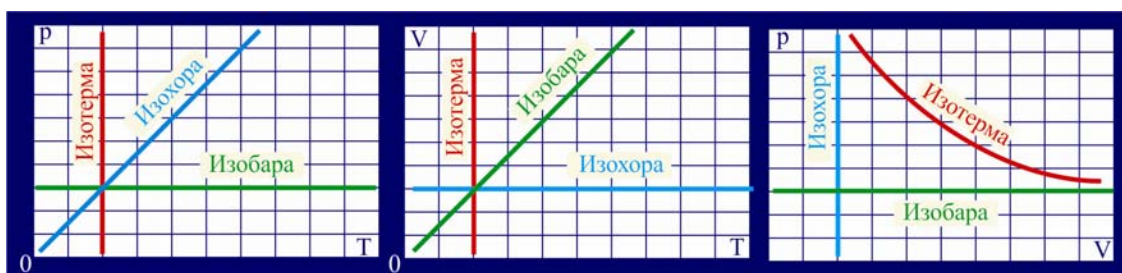
№19

На pT -диаграмме показан цикл тепловой машины, у которой рабочим телом является идеальный газ (см. рисунок). На каком участке цикла работа газа наибольшая по абсолютной величине?



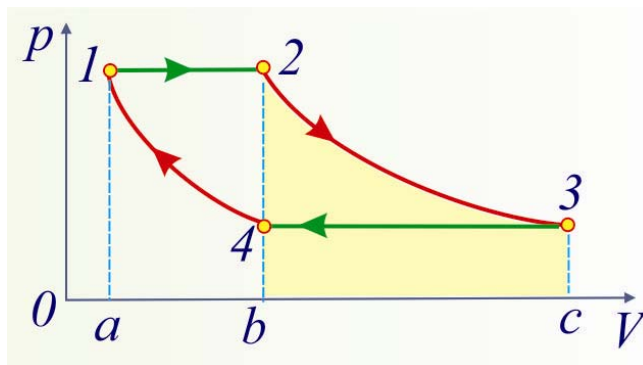
Решение

1. Для большей наглядности целесообразно заданный в $p = f(T)$ координатах цикл преобразовать в $p = f(V)$ координаты



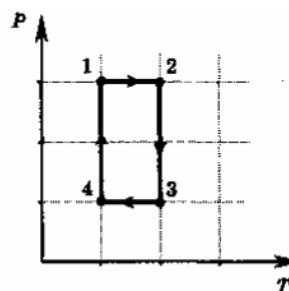
2. В $p - V$ координатах заданный цикл будет состоять из двух изотерм 2,3 и 4,1 и двух изобар 1,2 и 3,4.

3. В $p - V$ координатах работа численно равна площади фигуры, ограниченной линией части цикла и отрезком на оси объёма. Из рисунка видно, что наибольшей площадью обладает криволинейная трапеция b23c, т.е. наибольшая работа совершается на участке цикла $2 \rightarrow 3$.



№20

На pT -диаграмме показан цикл тепловой машины, у которой рабочим телом является идеальный газ (см. рисунок). На каком из участков цикла 1—2, 2—3, 3—4, 4—1 работа газа наибольшая по модулю?

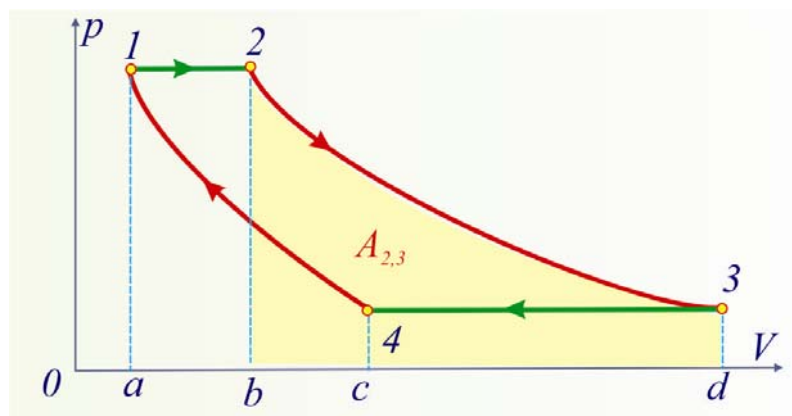


Решение

2. В $p - V$ координатах заданный цикл будет состоять из двух изотерм 2,3 и 4,1 и двух изобар 1,2 и 3,4.

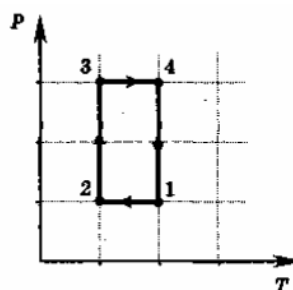
3. В $p - V$ координатах работа численно равна площади фигуры, ограниченной линией части цикла и отрезком на оси объёма. Из рисунка видно, что наибольшей

площадью обладает криволинейная трапеция $b23db$, т.е. наибольшая работа совершается на участке цикла $2 \rightarrow 3$.



№21

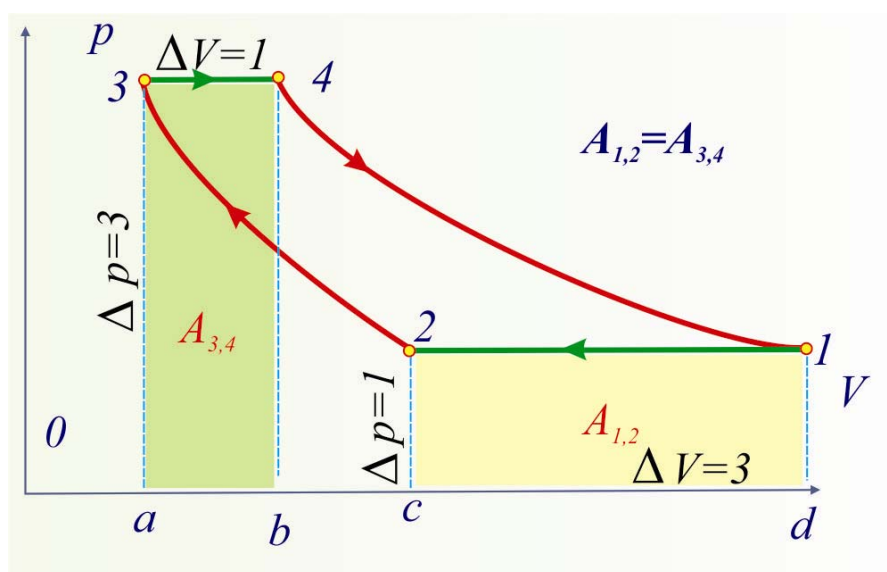
На pT -диаграмме показан цикл тепловой машины, у которой рабочим телом является идеальный газ (см. рисунок). Найдите модуль отношения работ газа $\frac{\Delta A_{34}}{\Delta A_{12}}$ на участках 3—4 и 1—2.



Решение

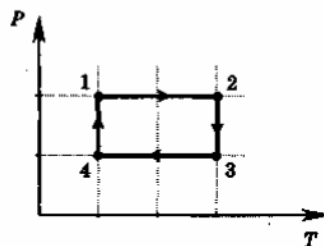
1. Участки 3,4 и 1,2 являются изобарами, причём давление отличается в три раза, участки 2,3 и 1,4 являются изотермами с отличными в два раза температурами:

2. Как видно из перестроенного графика цикла площади фигур ограниченные изобарами 3,4 и 1,2 одинаковые.

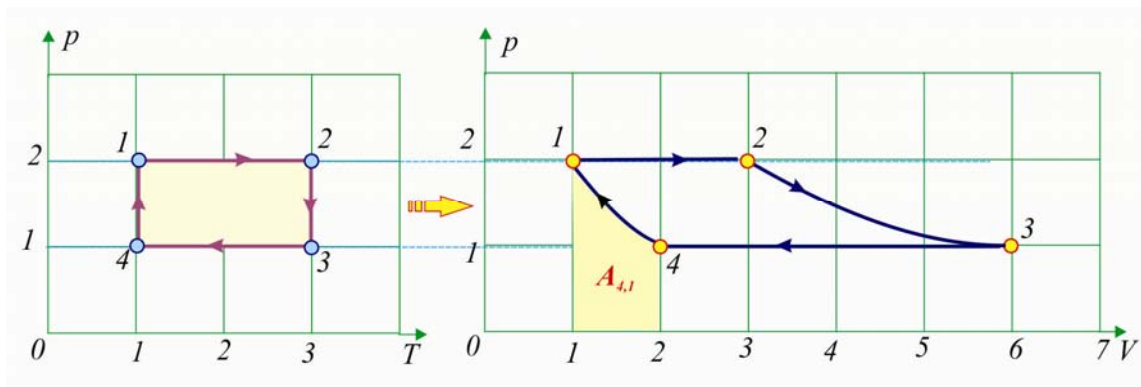


№22

На pT -диаграмме показан цикл тепловой машины, у которой рабочим телом является идеальный газ (см. рисунок). На каком участке цикла работа газа наименьшая по модулю?



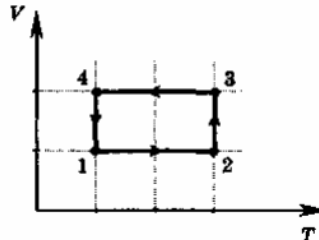
Решение



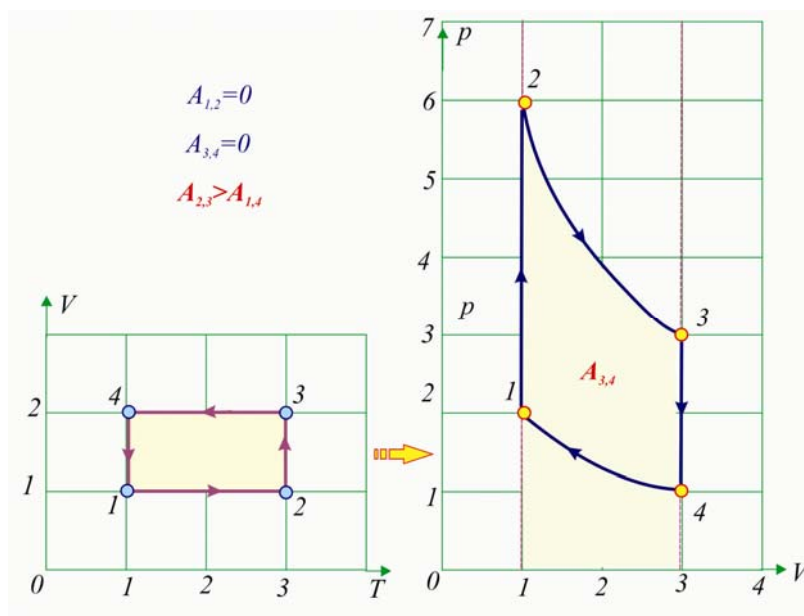
1. Из преобразованного в $p - V$ координаты графика видно, что минимальной будет работа на переходе $4 \rightarrow 1$.

№23

На VT -диаграмме показан цикл тепловой машины, у которой рабочим телом является идеальный газ (см. рисунок). На каком из четырех участков цикла $1-2$, $2-3$, $3-4$, $4-1$ работа газа наибольшая по абсолютной величине?



Решение



№24

Теплоизолированный сосуд объемом $V = 2 \text{ м}^3$ разделен пористой неподвижной перегородкой на две равные части. Атомы гелия могут свободно проникать через поры в перегородке, а атомы аргона — нет. В начальный момент в одной части сосуда находится $\nu_{\text{He}} = 2$ моль гелия, а в другой — $\nu_{\text{Ar}} = 1$ моль аргона. Температура гелия $T_{\text{He}} = 300 \text{ К}$, а температура аргона $T_{\text{Ar}} = 600 \text{ К}$. Определите температуру гелия после установления равновесия в системе.

Решение

1. Суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул до начала путешествия через перегородку атомов гелия:

$$\varepsilon_1 = \frac{3}{2} \nu_{\text{Ar}} T_{\text{Ar}} + \frac{3}{2} \nu_{\text{He}} T_{\text{He}};$$

2. После того как атомы гелия равномерно распределятся по всему объёму, температура по обе стороны перегородки станет одинаковой, при этом суммарная энергия всех молекул составит:

$$\varepsilon_2 = \frac{3}{2} R(\nu_{\text{Ar}} + \nu_{\text{He}})T;$$

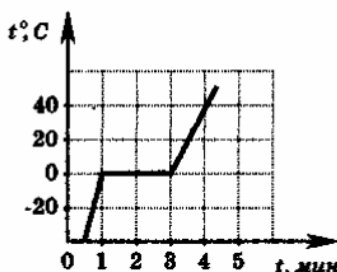
3. Ввиду отсутствия теплообмена с внешней средой и неизменности числа атомов гелия и аргона, для данной термодинамической системы справедлив закон сохранения энергии

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2; \Rightarrow \frac{3}{2} \nu_{\text{Ar}} T_{\text{Ar}} + \frac{3}{2} \nu_{\text{He}} T_{\text{He}} = \frac{3}{2} R(\nu_{\text{Ar}} + \nu_{\text{He}})T;$$

$$T = \frac{\nu_{\text{Ar}} T_{\text{Ar}} + \nu_{\text{He}} T_{\text{He}}}{\nu_{\text{Ar}} + \nu_{\text{He}}} = \frac{1 \cdot 600 + 2 \cdot 300}{3} = 400 \text{ К};$$

№25

На рисунке представлен график изменения температуры вещества в калориметре с течением времени. Теплоемкостью калориметра и тепловыми потерями можно пренебречь и считать, что подводимая к сосуду мощность постоянна. Рассчитайте удельную теплоемкость вещества в жидком состоянии. Удельная теплота плавления вещества равна 100 кДж/кг . В начальный момент времени вещество находилось в твердом состоянии.



Решение

1. В процессе измерения температуры вещество пребывает в двух фазовых состояниях, при этом протекают следующие теплофизические процессы: 1 — процесс

нагрева твёрдой фазы, 2 – процесс плавления вещества, 3 – процесс нагрева жидкой фазы вещества.

2. Время плавления вещества:

$$\tau_1 = 120 \text{ с};$$

3. Поскольку зависимость температуры от времени в процессе нагрева жидкости линейная, то промежутки времени и температур можно выбирать из удобства вычислений:

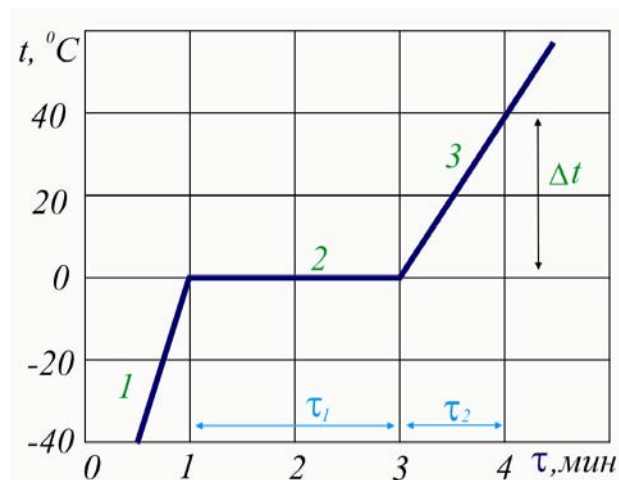
$$\tau_2 = 60 \text{ с}; \quad \Delta t = 40 \text{ }^\circ\text{C};$$

4. Ввиду постоянства подводимой мощности возможно записать следующую систему уравнений теплового баланса:

$$\left. \begin{aligned} P\tau_1 &= m\lambda; \\ P\tau_2 &= cm\Delta t; \end{aligned} \right\}$$

откуда следует:

$$c = \frac{\lambda\tau_2}{\tau_1\Delta t} = \frac{10^5 \cdot 60}{40 \cdot 120} = 1,25 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}};$$



№26

Теплоизолированный сосуд разделен теплопроводной неподвижной перегородкой на две части одинакового объема. В одной части сосуда находится гелий в количестве 2 моль, а в другой — аргон в количестве 2 моль. В начальный момент средняя квадратичная скорость атомов аргона в 2 раза больше скорости атомов гелия. Определите отношение давления гелия к давлению аргона после установления теплового равновесия.

Решение

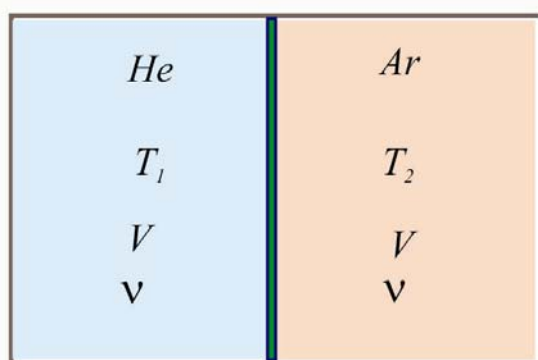
1. В начальный момент времени температура аргона будет больше, чем температура гелия:

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{3RT_{\text{He}}}{\mu_{\text{He}}}}; \\ 2v &= \sqrt{\frac{3RT_{\text{Ar}}}{\mu_{\text{Ar}}}}; \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \mu_{\text{He}} &\approx 4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}; \\ \mu_{\text{Ar}} &\approx 40 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}; \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{T_{\text{Ar}}}{T_{\text{He}}} \approx \frac{4\mu_{\text{Ar}}}{\mu_{\text{He}}} \approx 40;$$

2. В результате теплообмена через перегородку температуры станут одинаковыми, наступит тепловое равновесие $T_1 = T_2$, при этом число атомов гелия и аргона остаётся постоянным, поэтому:

$$\left. \begin{aligned} p_{\text{He}} V &= \nu_{\text{He}} RT; \\ p_{\text{Ar}} V &= \nu_{\text{Ar}} RT; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{p_{\text{He}}}{p_{\text{Ar}}} = 1;$$



3. Можно так же воспользоваться основным уравнением молекулярно-кинетической теории

$$\left. \begin{aligned} p_{\text{He}} &= \frac{v_{\text{He}} N_A}{V} k_B T; \\ p_{\text{Ar}} &= \frac{v_{\text{Ar}} N_A}{V} k_B T; \end{aligned} \right\} v_{\text{He}} = v_{\text{Ar}}; \Rightarrow \frac{p_{\text{He}}}{p_{\text{Ar}}} = 1;$$

№27

Теплоизолированный сосуд объемом $V = 2 \text{ м}^3$ разделен перегородкой на две равные части. В одной части сосуда находится 1 кг гелия, а в другой — 1 кг аргона. Средняя квадратичная скорость атомов аргона равна средней квадратичной скорости атомов гелия и составляет 500 м/с. Определите парциальное давление гелия после удаления перегородки.

Решение

1. Несмотря на равные скорости атомов гелия и аргона их температуры будут разными ввиду отличия в 10 раз молярной массы

$$\mu_{\text{Ar}} \approx 10\mu_{\text{He}} = 40 \frac{\text{кг}}{\text{моль}};$$

$$\left. \begin{aligned} T_{\text{He}} &\approx \frac{v^2 \mu_{\text{He}}}{3R}; \\ T_{\text{Ar}} &\approx \frac{v^2 \mu_{\text{Ar}}}{3R}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{T_{\text{Ar}}}{T_{\text{He}}} \approx \frac{\mu_{\text{Ar}}}{\mu_{\text{He}}} \approx 10;$$

2. После удаления перегородки через некоторое время наступит состояние теплового равновесия, температура газов будет одинаковой. Значение установившейся температуры можно определить из закона сохранения энергии:

$$\frac{(m_{\text{He}} + m_{\text{Ar}})v^2}{2} = m_{\text{He}}v^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{m_{\text{He}}}{\mu_{\text{He}}} + \frac{m_{\text{Ar}}}{\mu_{\text{Ar}}} \right) RT; \quad v^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\mu_{\text{He}}} + \frac{1}{\mu_{\text{Ar}}} \right) RT;$$

$$RT = \frac{2v^2 \mu_{\text{Ar}} \mu_{\text{He}}}{3(\mu_{\text{Ar}} + \mu_{\text{He}})};$$

3. Парциальное давление гелия из уравнения Клапейрона-Менделеева:

$$p_{\text{He}} = \frac{m_{\text{He}}}{\mu_{\text{He}}} \frac{RT}{V} = \frac{2m_{\text{He}}\mu_{\text{Ar}}v^2}{3V(\mu_{\text{Ar}} + \mu_{\text{He}})} \approx \frac{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5 \cdot 10^5}{6 \cdot 4,4 \cdot 10^{-3}} \approx 7,6 \cdot 10^4 \text{ Па};$$

№28

Сосуд объемом $V = 2 \text{ м}^3$ разделен пористой перегородкой на две равные части. В начальный момент в одной части сосуда находится гелий массой $m = 1 \text{ кг}$, а в другой — аргон массой $m = 1 \text{ кг}$. Атомы гелия могут свободно проникать через перегородку, а атомы аргона — нет. Начальная температура гелия равна температуре аргона: $T = 300 \text{ К}$. Определите внутреннюю энергию гелий-аргоновой смеси после установления равновесия в системе.

Решение

1. После наступления равновесного состояния гелий благодаря проницаемости перегородки равномерно распределится по всему объёму, причём на половине объёма, занятого аргоном окажется ν_1 молей гелия

$$\nu_1 = \frac{m}{2\mu_{\text{He}}},$$

и ν_2 молей аргона

$$\nu_2 = \frac{m}{\mu_{\text{Ar}}};$$

2. Суммарная внутренняя энергия атомов зависит только от температуры и их количества:

$$U_{\text{Ar+He}} = \frac{3}{2}(\nu_1 + \nu_2)RT = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2\mu_{\text{He}}} + \frac{1}{\mu_{\text{Ar}}}\right)RT;$$

$$U_{\text{Ar+He}} \approx 1,5\left(\frac{1}{8 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{4 \cdot 10^{-2}}\right) \cdot 8,3 \cdot 300 \approx 1,5 \cdot 150 \cdot 8,3 \cdot 300 \approx 560 \text{ кДж};$$

№29

Сосуд объёмом $V = 2 \text{ м}^3$ разделен пористой перегородкой на две равные части. В начальный момент в одной части сосуда находится гелий массой $m = 1 \text{ кг}$, а в другой — аргон массой $m = 1 \text{ кг}$. Атомы гелия могут свободно проникать через перегородку, а атомы аргона — нет. Начальная температура гелия равна температуре аргона: $T = 300 \text{ К}$. Определите внутреннюю энергию газа, оставшегося в той части сосуда, где первоначально находился гелий, после установления равновесия в системе.

Решение

1. После наступления равновесного состояния гелий благодаря проницаемости перегородки равномерно распределится по всему объёму, причём на половине объёма, занятого гелием окажется ν_1 молей гелия

$$\nu_1 = \frac{m}{2\mu_{\text{He}}},$$

2. Суммарная внутренняя энергия оставшихся атомов гелия определится как:

$$U_{\text{He}} = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu_{\text{He}}} RT = \frac{3}{4} \frac{mRT}{\mu_{\text{He}}} \approx \frac{3 \cdot 1 \cdot 8,3 \cdot 300}{16 \cdot 10^{-3}} \approx 467 \text{ кДж};$$

Электродинамика

№1

К однородному медному цилиндрическому проводнику длиной 40 м приложили разность потенциалов 10 В. Каким будет изменение температуры проводника ΔT через 15 с? Изменением сопротивления проводника и рассеянием тепла при его нагревании пренебречь. (Удельное сопротивление меди $1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.)

Решение

1. Количество теплоты, выделяющегося в проводнике подчиняется закону Джоуля-Ленца

$$Q = IU\tau = \frac{U^2}{R} \tau;$$

2. Это же количество теплоты может быть выражено через теплофизические параметры меди

$$Q = cm\Delta T = c\rho_{\text{Cu}} V\Delta T = c\rho_{\text{Cu}} \ell s\Delta T;$$

3. Электрическое сопротивление медного проводника:

$$R = \frac{\rho_R \ell}{s};$$

4. Приравняем уравнения количества тепла:

$$c\rho_{\text{Cu}} \ell s\Delta T = \frac{U^2 s \tau}{\rho_R \ell}; \Rightarrow \Delta T = \frac{U^2 \tau}{c\rho_{\text{Cu}} \rho_R \ell^2};$$

5. Изменение температуры проводника при:

$$c \approx 380 \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг}}{\text{К}}; \quad \rho_{\text{Cu}} \approx 8,93 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \rho_R \approx 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м};$$

$$\Delta T \approx \frac{100 \cdot 15}{380 \cdot 8,93 \cdot 10^3 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 1,6 \cdot 10^3} \approx 16,25 \text{ К};$$

№2

К однородному медному цилиндрическому проводнику на 15 с приложили разность потенциалов 1 В. Какова длина проводника, если его температура при этом повысилась на 10 К? Изменением сопротивления проводника и рассеянием тепла при его нагревании пренебречь. (Удельное сопротивление меди $1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.)

Решение

1. Количество теплоты, выделяющегося в проводнике подчиняется закону Джоуля-Ленца

$$Q = IU\tau = \frac{U^2}{R} \tau;$$

2. Это же количество теплоты может быть выражено через теплофизические параметры меди

$$Q = cm\Delta T = c\rho_{\text{Cu}} V\Delta T = c\rho_{\text{Cu}} \ell s\Delta T;$$

3. Электрическое сопротивление медного проводника:

$$R = \frac{\rho_R \ell}{s};$$

4. Приравняем уравнения количества тепла:

$$c\rho_{\text{Cu}} \ell s\Delta T = \frac{U^2 s \tau}{\rho_R \ell}; \Rightarrow \Delta T = \frac{U^2 \tau}{c\rho_{\text{Cu}} \rho_R \ell^2};$$

5. Длина проводника при:

$$c \approx 380 \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг}}{\text{К}}; \quad \rho_{\text{Cu}} \approx 8,93 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \rho_R \approx 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м};$$

$$\ell = \sqrt{\frac{U^2 \tau}{c\rho_{\text{Cu}} \rho_R \Delta T}} \approx \sqrt{\frac{1 \cdot 15}{380 \cdot 8,93 \cdot 10^3 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 10}} \approx 5,1 \text{ м};$$

№3

К однородному медному цилиндрическому проводнику длиной 10 м приложили разность потенциалов 1 В. Определите промежуток времени, в течение которого температура проводника повысится на 10 К. Изменением сопротивления проводника и рассеянием тепла при его нагревании пренебrecь. (Удельное сопротивление меди $1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.)

Решение

1. Количество теплоты, выделяющегося в проводнике подчиняется закону Джоуля-Ленца

$$Q = IU\tau = \frac{U^2}{R} \tau;$$

2. Это же количество теплоты может быть выражено через теплофизические параметры меди

$$Q = cm\Delta T = c\rho_{\text{Cu}} V\Delta T = c\rho_{\text{Cu}} \ell s\Delta T;$$

3. Электрическое сопротивление медного проводника:

$$R = \frac{\rho_R \ell}{s};$$

4. Приравняем уравнения количества тепла:

$$c\rho_{\text{Cu}} \ell s\Delta T = \frac{U^2 s \tau}{\rho_R \ell}; \Rightarrow \Delta T = \frac{U^2 \tau}{c\rho_{\text{Cu}} \rho_R \ell^2};$$

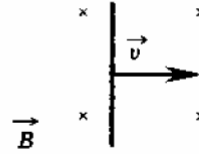
5. Время, в течении которого температура проводника повысилась на 10 К:

$$c \approx 380 \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг}}{\text{К}}; \quad \rho_{\text{Cu}} \approx 8,93 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \quad \rho_R \approx 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м};$$

$$\tau = \frac{\Delta T c \rho_{\text{Cu}} \rho_R \ell^2}{U^2} \approx \frac{10 \cdot 380 \cdot 8,93 \cdot 10^3 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8} \cdot 100}{1} \approx 57 \text{ с};$$

№4

Горизонтально расположенный проводник длиной 1 м движется равноускоренно в вертикальном однородном магнитном поле, индукция которого равна 0,5 Тл и направлена перпендикулярно проводнику и скорости его движения (см. рисунок). Начальная скорость проводника равна нулю, а его ускорение 8 м/с². Вычислите ЭДС индукции на концах проводника в тот момент, когда он переместился на 1 м?



Решение

1. В соответствии с законом электромагнитной индукции Майкла Фарадея:

$$|\varepsilon_i| = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{B\Delta s}{\Delta t} = \frac{B\ell\Delta x}{\Delta t} = Bv\ell;$$

2. Кинематические уравнения движения проводника позволяют определить скорость его движения:

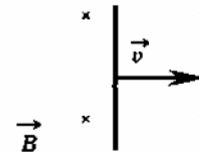
$$\left. \begin{aligned} v &= at; \\ \Delta x &= \frac{at^2}{2}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \sqrt{2a\Delta x};$$

3. Модуль ЭДС индукции:

$$|\varepsilon_i| = B\ell\sqrt{2a\Delta x} = 0,5 \cdot 1 \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 1} = 2 \text{ В};$$

№5

Горизонтально расположенный проводник длиной 1 м движется равноускоренно в вертикальном однородном магнитном поле, индукция которого направлена перпендикулярно проводнику и скорости его движения (см. рисунок). При начальной скорости проводника, равной нулю, и ускорении 8 м/с² он переместился на 1 м. Какова индукция магнитного поля, в котором двигался проводник, если ЭДС индукции на концах проводника в конце движения равна 2 В?



Решение

1. В соответствии с законом электромагнитной индукции Майкла Фарадея:

$$|\varepsilon_i| = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{B\Delta s}{\Delta t} = \frac{B\ell\Delta x}{\Delta t} = Bv\ell;$$

2. Кинематические уравнения движения проводника позволяют определить скорость его движения:

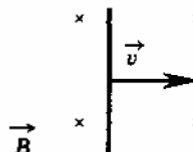
$$\left. \begin{aligned} v &= at; \\ \Delta x &= \frac{at^2}{2}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \sqrt{2a\Delta x};$$

3. Величина индукции магнитного поля, обеспечивающая заданную ЭДС:

$$|\varepsilon_i| = B\ell\sqrt{2a\Delta x}; \Rightarrow B = \frac{|\varepsilon_i|}{\ell\sqrt{2a\Delta x}} = \frac{2}{1\sqrt{2 \cdot 8 \cdot 1}} = 0,5 \text{ Тл};$$

№6

Горизонтально расположенный проводник движется равноускоренно в вертикальном однородном магнитном поле, индукция которого равна 0,5 Тл и направлена перпендикулярно проводнику и скорости его движения (см. рисунок). При начальной скорости проводника, равной нулю, и ускорении 8 м/с² проводник переместился на 1 м. ЭДС индукции на концах проводника в конце движения равна 2 В. Какова длина проводника?



Решение

1. В соответствии с законом электромагнитной индукции Майкла Фарадея:

$$|\varepsilon_i| = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{B\Delta s}{\Delta t} = \frac{B\ell\Delta x}{\Delta t} = Bv\ell;$$

2. Кинематические уравнения движения проводника позволяют определить скорость его движения:

$$\left. \begin{aligned} v &= at; \\ \Delta x &= \frac{at^2}{2}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \sqrt{2a\Delta x};$$

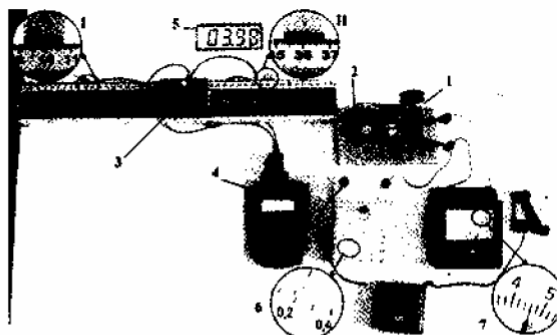
3. Величина индукции магнитного поля, обеспечивающая заданную ЭДС:

$$|\varepsilon_i| = B\ell\sqrt{2a\Delta x}; \Rightarrow \ell = \frac{|\varepsilon_i|}{B\sqrt{2a\Delta x}} = \frac{2}{0,5\sqrt{2 \cdot 8 \cdot 1}} = 1\text{ м};$$

№7

На фотографии представлена установка, в которой электродвигатель (1) с помощью нити (2) равномерно перемещает каретку (3) вдоль направляющей горизонтальной линейки.

При прохождении каретки мимо датчика А секундомер (4) включается, а при прохождении каретки мимо датчика В секундомер выключается.



После измерения силы тока амперметром (6), напряжения вольтметром (7) и времени движения каретки (дисплей 5) ученик с помощью динамометра измерил силу трения скольжения каретки по направляющей. Она оказалась равной 0,4 Н. Рассчитайте отношение α работы силы упругости нити к работе электрического тока во внешней цепи.

Решение

1. Данные показаний приборов:

$$\tau \approx 3,98\text{ с}; I \approx 0,22\text{ А}; U \approx 4,6\text{ В}; s = 0,26\text{ м};$$

2. Сила упругости возникает вследствие наличия силы трения, работа против силы трения совершаемая электродвигателем:

$$A_k = F_{Tp}s;$$

3. Работа, совершаемая электрическим двигателем:

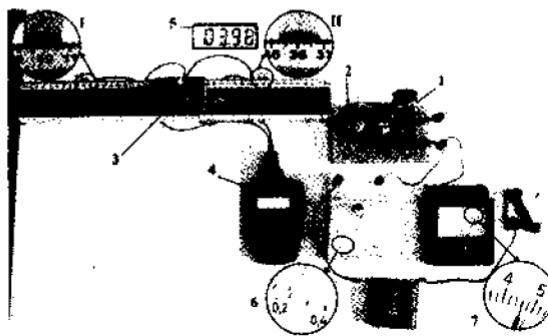
$$A_э = IU\tau;$$

4. Искомое отношение работ α :

$$\alpha = \frac{A_k}{A_э} = \frac{F_{Tp}s}{IU\tau} \approx \frac{0,4 \cdot 0,26}{0,22 \cdot 4,6 \cdot 3,98} \approx 3\%;$$

№8

На фотографии представлена установка для преобразования электрической энергии в механическую с помощью электродвигателя (1). Нить (2) равномерно перемещает каретку (3) вдоль направляющей горизонтальной линейки. При прохождении каретки мимо датчика А секундомер (4) включается, а при прохождении каретки мимо датчика В секундомер выключается. Дисплей (5) секундомера в этот момент показан слева от датчика. Какова сила трения скольжения между кареткой и направляющей, если при силе тока, зафиксированной амперметром (6), и напряжении, которое показывает вольтметр (7), модуль работы силы трения, возникающей при движении каретки, составляет 0,05 от работы электрического тока?



Решение

1. Данные показаний приборов:

$$\tau \approx 3,98\text{c}; I \approx 0,22\text{A}; U \approx 4,6\text{B}; s = 0,26\text{м};$$

2. Сила упругости возникает вследствие наличия силы трения, работа против силы трения совершаемая электродвигателем:

$$A_k = F_{Tp}s;$$

3. Работа, совершаемая электрическим двигателем:

$$A_э = IU\tau;$$

4. Модуль силы трения:

$$\alpha = \frac{A_k}{A_э} = \frac{F_{Tp}s}{IU\tau}; \Rightarrow |F_{Tp}| = \frac{\alpha IU\tau}{s} \approx \frac{0,05 \cdot 0,22 \cdot 4,6 \cdot 3,98}{0,26} \approx 0,8\text{H};$$

№9

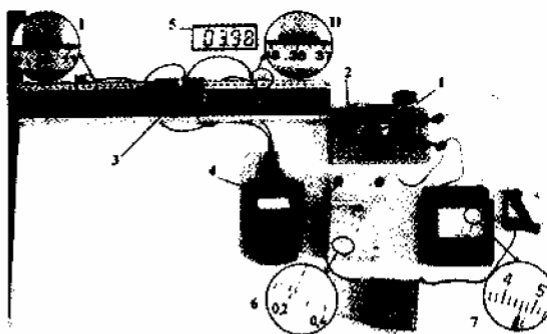
Для выполнения исследования преобразования электрической энергии в механическую используются электродвигатель (1) с сопротивлением якоря 3 Ом и редуктор (2), увеличивающий силу тяги.

При сборке измерительной установки нить от каретки (3) с грузом прикрепляется к валу редуктора, и при вращении вала каретка перемещается по направляющей.

При прохождении каретки мимо датчика I секундомер (4) включается и при дальнейшем равномерном движении каретки фиксирует время от момента включения. При прохождении каретки мимо датчика II секундомер выключается. Показания секундомера в этот момент фиксируются на дисплее (5).

После измерения силы тока амперметром (6), напряжения вольтметром (7) и времени движения каретки между датчиками ученик измерил с помощью динамометра силу трения скольжения каретки по направляющей. Она оказалась равной 0,4 Н.

В данной установке за счет энергии, потребляемой от батарейки, совершается работа силой упругости нити, нагреваются якорь электродвигателя и детали редуктора. Рассчитайте количество теплоты, выделившейся в редукторе. Измерительные приборы считать идеальными.



Решение

1. С позиции закона сохранения энергии условия работы установки могут быть охарактеризованы уравнением:

$$IU\tau = I^2R\tau + F_{\text{тр}}s + Q_x,$$

где $IU\tau$ – энергия, потребляемая установкой от источника питания (батарейки), $I^2R\tau$ – энергия расходуемая за время τ на нагревание электрических элементов схемы, Q_x – энергия, уходящая на нагревание механических элементов схемы, в основном на тепловые потери в редукторе.

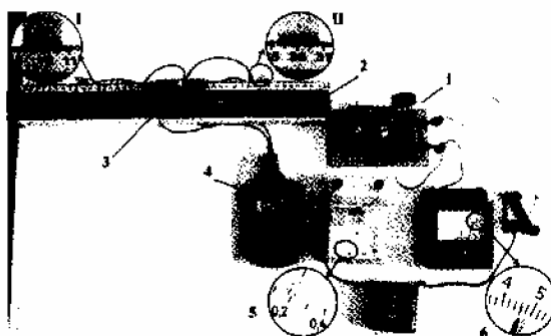
2. Данные показаний приборов: $\tau \approx 3,98\text{с}$; $I \approx 0,22\text{А}$; $U \approx 4,6\text{В}$; $s = 0,26\text{м}$;

3. Количество теплоты, выделяющейся в редукторе:

$$Q_x = IU\tau - I^2R\tau - F_{\text{тр}}s \approx 0,22 \cdot 4,6 \cdot 3,98 - 0,4 \cdot 0,26 - 4,84 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 3,98 \approx 3,3\text{Дж};$$

№10

На фотографии представлена установка, в которой электродвигатель (1) с помощью нити (2) равномерно перемещает каретку (3) вдоль направляющей. При прохождении каретки (3) мимо датчика I секундомер (4) включается и при дальнейшем движении каретки фиксирует время от момента включения. При прохождении каретки мимо датчика II секундомер выключается.



После измерения силы тока амперметром (5) и напряжения вольтметром (6) ученик измерил с помощью динамометра силу трения скольжения каретки по направляющей. Она оказалась равной 0,4 Н. Какими будут показания секундомера при его выключении, если работа силы упругости нити составляет 0,03 от работы источника тока во внешней цепи?

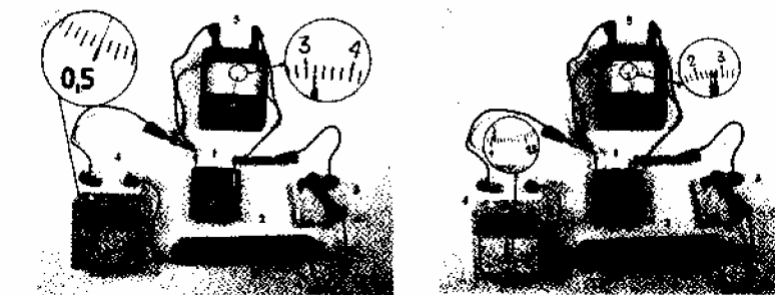
Решение

- Данные показаний приборов:
 $\tau \approx 3,98\text{с}; I \approx 0,22\text{А}; U \approx 4,6\text{В}; s = 0,26\text{м};$
- Сила упругости возникает вследствие наличия силы трения, работа против силы трения совершаемая электродвигателем:
 $A_k = F_{\text{тр}}s;$
- Работа, совершаемая электрическим двигателем:
 $A_э = IU\tau;$
- Время в течение, которого обеспечивается заданное значение коэффициента α :

$$\alpha = \frac{A_k}{A_э} = \frac{F_{\text{тр}}s}{IU\tau}; \Rightarrow \tau = \frac{F_{\text{тр}}s}{\alpha IU} \approx \frac{0,4 \cdot 0,26}{0,03 \cdot 0,22 \cdot 4,6} \approx 3,4\text{с};$$

№11

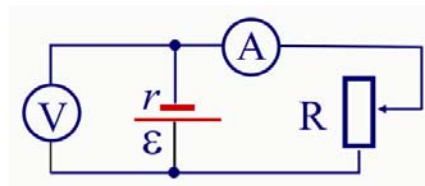
Ученик собрал электрическую цепь, состоящую из батарейки (1), реостата (2), ключа (3), амперметра (4) и вольтметра (5). После этого он провел измерения напряжения и силы тока в цепи при двух различных значениях сопротивлений внешней цепи (см. фотографии). Определите ЭДС и внутреннее сопротивление батарейки.



Решение

1. Показания приборов, необходимые для дальнейших вычислений:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= 3,2\text{В}; & I_1 &= 0,5\text{А}; \\ U_2 &= 2,6\text{В}; & I_2 &= 1\text{А}; \end{aligned} \right\}$$



2. Определим внутренне сопротивление источника тока, воспользовавшись законом Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}; \Rightarrow \left. \begin{aligned} \varepsilon &= I_1 R_1 + I_1 r; \\ \varepsilon &= I_2 R_2 + I_2 r; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \varepsilon &= U_1 + I_1 r; \\ \varepsilon &= U_2 + I_2 r; \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_1 + I_1 r = U_2 + I_2 r;$$

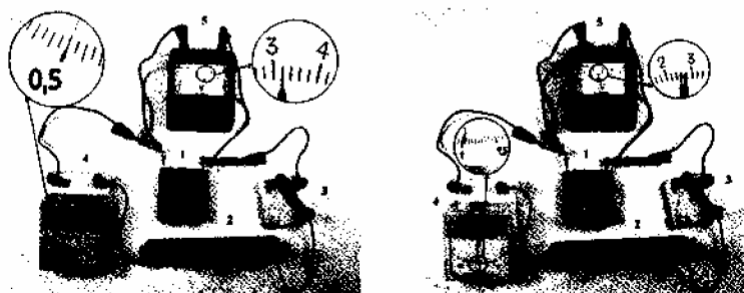
$$r = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} = \frac{3,2 - 2,6}{1 - 0,5} = 1,2\text{Ом};$$

3. ЭДС источника:

$$\varepsilon = U_2 + I_2 r = 2,6 + 1 \cdot 1,2 = 3,8\text{В};$$

№12

Ученик собрал электрическую цепь, состоящую из батарейки (1), реостата (2), ключа (3), амперметра (4) и вольтметра (5). После этого он измерил напряжение на полюсах источника тока и силу тока в цепи при различных положениях ползунка реостата (см. фотографии). Определите КПД источника тока в первом опыте.



Решение

1. Показания приборов, необходимые для дальнейших вычислений:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= 3,2\text{В}; & I_1 &= 0,5\text{А}; \\ U_2 &= 2,6\text{В}; & I_2 &= 1\text{А}; \end{aligned} \right\}$$

2. Определим внутренне сопротивление источника тока, воспользовавшись законом Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}; \Rightarrow \left. \begin{aligned} \varepsilon &= I_1 R_1 + I_1 r; \\ \varepsilon &= I_2 R_2 + I_2 r; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \varepsilon &= U_1 + I_1 r; \\ \varepsilon &= U_2 + I_2 r; \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_1 + I_1 r = U_2 + I_2 r;$$

$$r = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} = \frac{3,2 - 2,6}{1 - 0,5} = 1,2\text{Ом};$$

3. ЭДС источника:

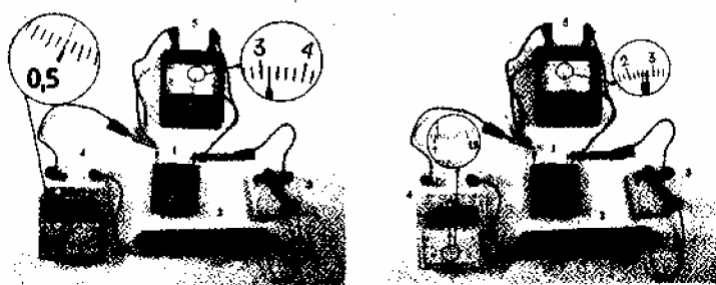
$$\varepsilon = U_2 + I_2 r = 2,6 + 1 \cdot 1,2 = 3,8\text{В};$$

4. Коэффициент полезного действия источника тока показывает, какая часть энергии рассеивается на внешней нагрузке:

$$\eta \frac{I_1 U_1}{\varepsilon I_1} = \frac{U_1}{\varepsilon} = \frac{3,2}{3,8} \approx 0,84; \quad \eta \approx 84\%;$$

№13

Ученик собрал электрическую цепь, состоящую из батарейки (1), реостата (2), ключа (3), амперметра (4) и вольтметра (5). После этого он измерил напряжение на полюсах источника тока и силу тока в цепи при различных положениях ползунка реостата (см. фотографии). Определите количество теплоты, выделяющееся внутри батарейки за 1 мин во втором опыте.



Решение

1. Показания приборов, необходимые для дальнейших вычислений:

$$\left. \begin{array}{l} U_1 = 3,2\text{В}; \quad I_1 = 0,5\text{А}; \\ U_2 = 2,6\text{В}; \quad I_2 = 1\text{А}; \end{array} \right\}$$

2. Определим внутренне сопротивление источника тока, воспользовавшись законом Ома для полной цепи:

$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{\varepsilon}{R + r}; \\ \varepsilon = I_1 R_1 + I_1 r; \\ \varepsilon = I_2 R_2 + I_2 r; \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \varepsilon = U_1 + I_1 r; \\ \varepsilon = U_2 + I_2 r; \end{array} \right\} \Rightarrow U_1 + I_1 r = U_2 + I_2 r;$$

$$r = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} = \frac{3,2 - 2,6}{1 - 0,5} = 1,2\text{Ом};$$

3. Количество теплоты, выделившейся в источнике тока с внутренним сопротивлением r за время $\tau = 60$ с:

$$Q_r = I_2^2 r \tau \approx 1 \cdot 1,2 \cdot 60 \approx 72\text{Дж};$$

№14

В колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивностью L и воздушного конденсатора емкостью C , происходят гармонические колебания силы тока с амплитудой I_0 . В тот момент, когда сила тока в катушке равна нулю, быстро (по сравнению с периодом колебаний) пространство между пластинами заполняют диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1,5$. На сколько изменится полная энергия контура?

Решение

1. По амплитудному значению силы тока через индуктивность можно, используя закон сохранения энергии, определить амплитудное значение заряда конденсатора:

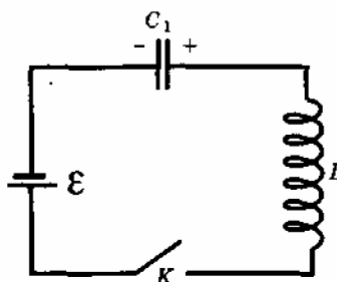
$$W_{C(\max)} = W_{L(\max)}; \quad \frac{LI_0^2}{2} = \frac{Q_0^2}{2C}; \quad \Rightarrow \quad Q_0^2 = LI_0^2 C;$$

2. Изменение энергии LC-контура будет происходить вследствие увеличения ёмкости конденсатора при помещении между его обкладками диэлектрического материала с $\varepsilon > 1$:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{Q_0^2}{2\varepsilon C} - \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right) = \frac{LI_0^2}{2} \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right) = -\frac{LI_0^2}{6};$$

№15

В изображенной на рисунке схеме ЭДС батареи $\varepsilon = 10$ В, ёмкость конденсатора $C = 2$ мкФ, индуктивность катушки L неизвестна. При разомкнутом ключе K конденсатор заряжен до напряжения $U_0 = 0,5$ Э. Пренебрегая омическим сопротивлением цепи, определите максимальный заряд на конденсаторе после замыкания ключа.



Решение

1. При замыкании ключа, в отсутствии омического сопротивления цепи, возникнут гармонические электромагнитные колебания, при которых конденсатор будет периодически приобретать максимальный электрический заряд $Q_{\max}$, при этом изменение заряда относительно начального будет иметь величину:

$$\Delta Q = Q_{\max} - CU_0;$$

2. Изменение энергии конденсатора при замыкании ключа определится законом сохранения энергии:

$$\Delta W = W_{\max} - W_0 = \frac{Q_{\max}^2}{2C} - \frac{CU_0^2}{2};$$

3. Изменение энергии конденсатора численно равно работе сторонних сил:

$$\Delta W = A_{C\Gamma}; \quad \frac{Q_{\max}^2}{2C} - \frac{CU_0^2}{2} = \Delta Q \varepsilon; \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_{\max}^2}{2C} - \frac{CU_0^2}{2} = \varepsilon(Q_{\max} - CU_0);$$

4. Преобразуем последнее уравнение для определения величины максимального заряда на конденсаторе:

$$Q_{\max}^2 - C^2 U_0^2 = 2C\varepsilon(Q_{\max} - CU_0); \quad Q_{\max}^2 - C^2 U_0^2 - 2C\varepsilon Q_{\max} + 2C^2 U_0^2 = 0;$$

$$Q_{\max}^2 - Q_{\max}(2C\varepsilon) - (C^2 U_0^2 + 2C^2 U_0^2) = 0; \quad U_0 = \varepsilon/2;$$

$$Q_{\max}^2 - Q_{\max}(2C\varepsilon) - \left(C^2 \frac{\varepsilon^2}{4} + 2C^2 \frac{\varepsilon^2}{2} \right) = 0; \quad Q_{\max}^2 - Q_{\max}(2C\varepsilon) + \frac{3}{4} C^2 \varepsilon^2 = 0;$$

5. Полученное квадратное уравнение имеет два решения:

$$Q_{\max(1,2)} = C\varepsilon \pm \sqrt{\frac{C^2\varepsilon^2}{4} + \frac{3}{4}C^2\varepsilon^2} = C\varepsilon \pm \frac{C\varepsilon}{2};$$

$$Q_{\max(1)} = \frac{3}{2}C\varepsilon; \quad Q_{\max(2)} = \frac{1}{2}C\varepsilon,$$

поскольку

$$Q_{\max(1)} > Q_{\max(2)},$$

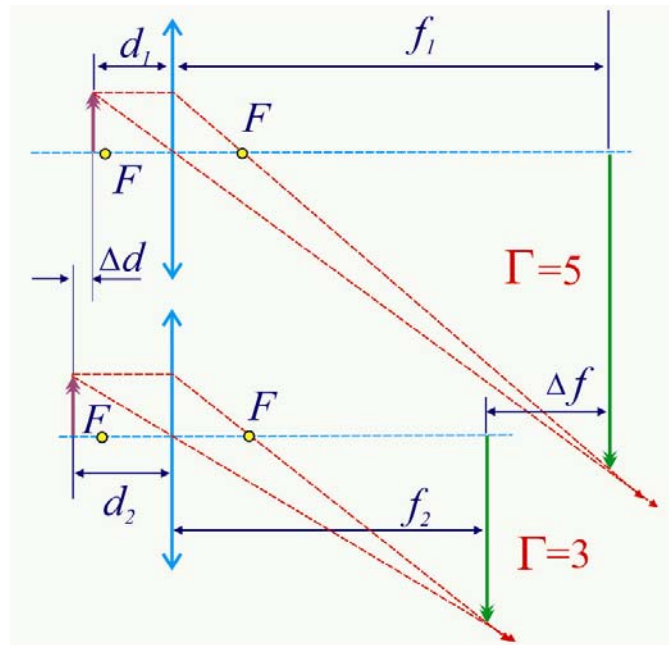
то второй корень уравнения соответствует начальному значению, когда цепь разомкнута, следовательно, после замыкания ключа:

$$Q_{\max(1)} = \frac{3}{2}C\varepsilon;$$

№16

На экране с помощью тонкой линзы получено изображение предмета с пятикратным увеличением. Экран передвинули на 30 см вдоль главной оптической оси линзы. Затем при неизменном положении линзы передвинули предмет, чтобы изображение снова стало резким. В этом случае получилось изображение с трехкратным увеличением. На сколько пришлось передвинуть предмет относительно его первоначального положения?

Решение



1. Уравнения тонкой линзы для заданных положений предмета:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{f_1 d_1}{f_1 + d_1}; \\ F &= \frac{f_2 d_2}{f_2 + d_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F &= \frac{f_1}{1 + \frac{f_1}{d_1}}; \\ F &= \frac{f_2}{1 + \frac{f_2}{d_2}} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{f_1}{d_1} &= \Gamma_1; \\ \frac{f_2}{d_2} &= \Gamma_2; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F &= \frac{f_1}{1 + \Gamma_1}; \\ F &= \frac{f_2}{1 + \Gamma_2} = \frac{f_1 - \Delta f}{1 + \Gamma_2} \end{aligned} \right\}$$

2. Т.к. фокусное расстояние сохраняется, то:

$$\frac{f_1}{1+\Gamma_1} = \frac{f_1 - \Delta f}{1+\Gamma_2}; \Rightarrow f_1 + f_1\Gamma_2 = f_1 - \Delta f + f_1\Gamma_1 - \Gamma_1\Delta f; \quad f_1 = \frac{\Delta f(1+\Gamma_1)}{\Gamma_1 - \Gamma_2} = 0,9\text{м};$$

3. Первоначальное расстояние от плоскости линзы до предмета d_1 :

$$d_1 = \frac{f_1}{\Gamma_1} = 0,18\text{м};$$

4. Расстояние от плоскости линзы до изображения после перемещения экрана:

$$f_2 = f_1 - \Delta f = 0,6\text{м};$$

5. Расстояние от предмета до плоскости линзы после смещения экрана и предмета:

$$d_2 = \frac{f_2}{\Gamma_2} = 0,2\text{м};$$

6. Расстояние Δd , на которое пришлось передвинуть предмет для получения резкого изображения:

$$\Delta d = d_2 - d_1 = 0,02\text{м} = 2\text{см};$$

№17

Линза, фокусное расстояние которой 15 см, дает на экране изображение предмета с пятикратным увеличением. Экран передвинули вдоль главной оптической оси линзы. Затем при неизменном положении линзы передвинули предмет, чтобы изображение снова стало резким. В этом случае получено изображение с трехкратным увеличением. На сколько пришлось сдвинуть предмет относительно его первоначального положения?

Решение

1. Уравнения тонкой линзы для заданных положений предмета (см. рис. предыдущей задачи):

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{f_1 d_1}{f_1 + d_1}; \\ F &= \frac{f_2 d_2}{f_2 + d_2}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F &= \frac{f_1}{1 + \frac{f_1}{d_1}}; \\ F &= \frac{f_2}{1 + \frac{f_2}{d_2}}; \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{f_1}{d_1} &= \Gamma_1; \\ \frac{f_2}{d_2} &= \Gamma_2; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} F &= \frac{f_1}{1 + \Gamma_1}; \\ F &= \frac{f_2}{1 + \Gamma_2} = \frac{f_1 - \Delta f}{1 + \Gamma_2}; \end{aligned} \right\}$$

2. Расстояния от первоначального положения предмета и его изображения до плоскости линзы:

$$f_1 = F(1 + \Gamma_1) = 0,9\text{м}; \quad d_1 = \frac{f_1}{\Gamma_1} = 0,18\text{м};$$

3. Расстояния от плоскости линзы до предмета и его изображения после перемещения экрана и предмета:

$$f_2 = F(1 + \Gamma_2) = 0,6\text{м}; \quad d_2 = \frac{f_2}{\Gamma_2} = 0,2\text{м};$$

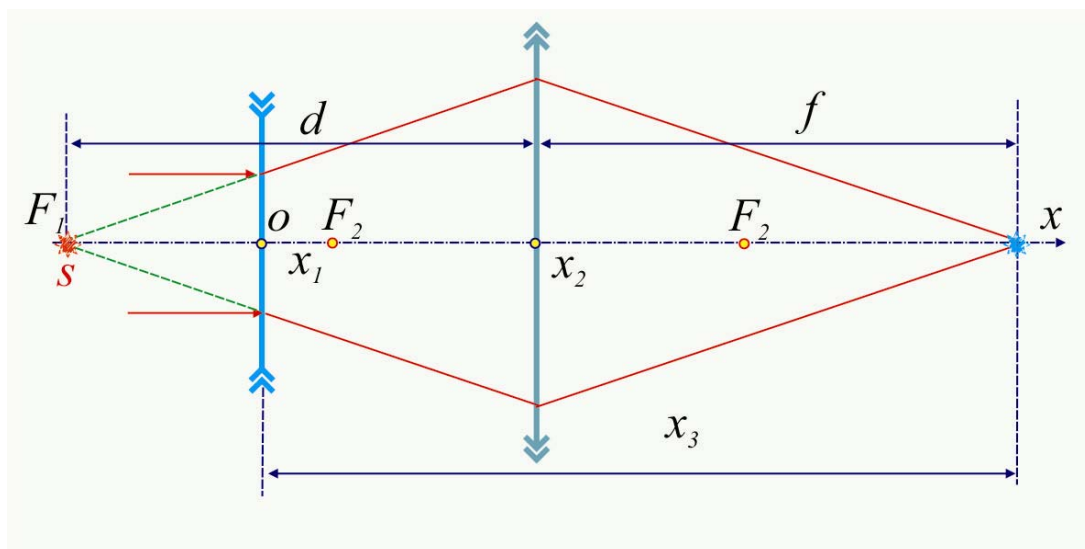
4. Расстояние, на которое пришлось передвинуть предмет для получения резкого изображения

$$\Delta d = d_2 - d_1 = 0,02\text{м} = 2\text{см};$$

№18

На оси OX в точке $x_1 = 0$ находится оптический центр тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = -20$ см, а в точке $x_2 = 20$ см — тонкой собирающей линзы. Главные оптические оси обеих линз лежат на оси OX . На рассеивающую линзу вдоль оси OX падает параллельный пучок света из области $x < 0$. Пройдя данную оптическую систему, лучи собираются в точке с координатой $x_3 = 60$ см. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы F_2 .

Решение



1. При падении параллельного пучка света на рассеивающую линзу лучи, преломившись, образуют мнимый источник S расположенный в её фокусе F_1 . Этот мнимый источник даст изображение в тонкой собирающей линзе.

2. Расстояние от мнимого источника до собирающей линзы

$$d = F_1 + x_2 = 0,4\text{ м};$$

3. Расстояние от плоскости собирающей линзы до изображения источника

$$f = x_3 - x_2 = 0,4\text{ м};$$

4. Фокусное расстояние собирающей линзы

$$F_2 = \frac{fd}{f + d} = \frac{0,4 \cdot 0,4}{0,8} = 0,2\text{ м};$$

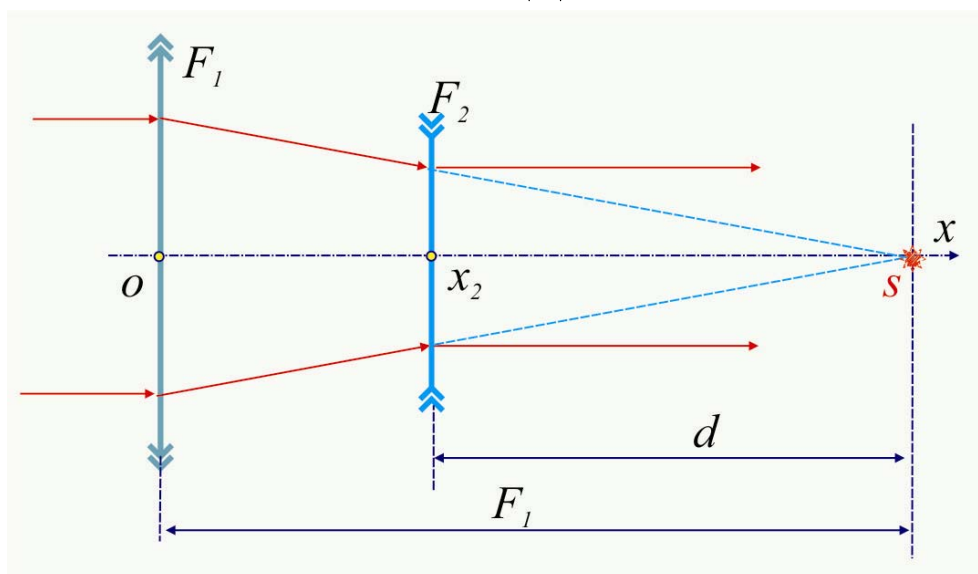
№19

На оси OX в точке $x_1 = 0$ находится оптический центр тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 30$ см, а в точке $x_2 = 15$ см — тонкой рассеивающей линзы. Главные оптические оси обеих линз лежат на оси OX . На собирающую линзу по оси OX падает параллельный пучок света из области $x < 0$. Пройдя оптическую систему, пучок остается параллельным. Найдите фокусное расстояние F_2 рассеивающей линзы.

Решение

1. Формула тонкой рассеивающей линзы при условии $f_2 = \infty$

$$-\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = -\frac{1}{|F_2|} = d;$$



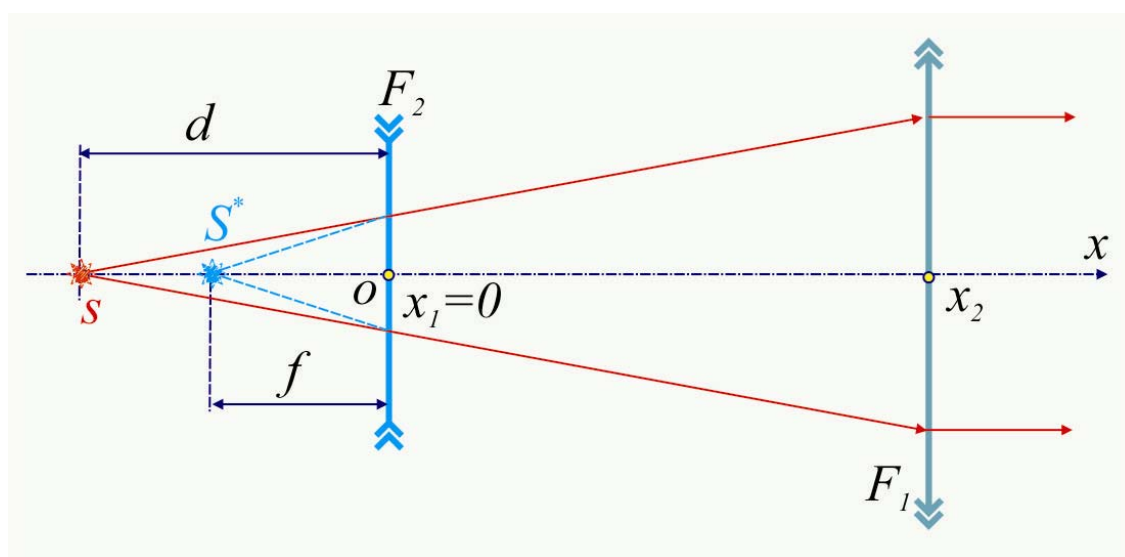
2. Как видно из геометрических построений

$$F_1 = x_2 + d = x_2 + |F_2|; \Rightarrow |F_2| = F_1 - x_2 = 0,15\text{м} = 15\text{см};$$

№20

На оси OX в точке $x_1 = 0$ находится оптический центр тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = -20$ см, а в точке $x_2 = 20$ см — тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_2 = 30$ см. Главные оптические оси обеих линз лежат на оси x . Свет от точечного источника S , расположенного в точке $x < 0$, пройдя данную оптическую систему, распространяется параллельным пучком. Найдите координату x точечного источника.

Решение



1. Расходящиеся лучи от точечного источника S , преломившись на рассеивающей линзе, соберутся в её фокусе, образовав мнимое изображение источника S^*

$$f = F_2 - x_2 = 0,1\text{м};$$

2. Из уравнения тонкой рассеивающей линзы:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F_1}; \Rightarrow \frac{1}{d} = \frac{F_1 - f}{F_1 f}; \Rightarrow d = \frac{F_1 f}{F_1 - f} = \frac{0,2 \cdot 0,1}{0,2 - 0,1} = 0,2\text{м};$$

3. Координата точечного источника:

$$x = -d = -20\text{см};$$

№21

В дно водоема глубиной 3 м вертикально вбита свая, скрытая под водой. Высота сваи 2 м. Угол падения солнечных лучей на поверхность воды равен 30° . Определите длину тени сваи на дне водоема. Коэффициент преломления воды $n = \frac{4}{3}$.

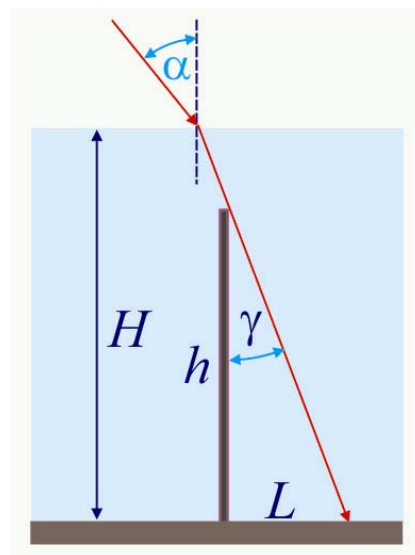
Решение

1. Определим угол преломления по заданному коэффициенту преломления n

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}; \Rightarrow \gamma = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{0,5}{1,33}\right) \approx 22^\circ;$$

2. Длина тени L определится из прямоугольного треугольника образованного преломлённым лучом, прошедшим через вершину сваи, высотой сваи h и тенью

$$\text{tg} \gamma = \frac{L}{h}; \Rightarrow L = h \text{tg} \gamma \approx 2 \cdot 0,4 \approx 0,8\text{м};$$



№22

В дно водоема глубиной 3 м вертикально вбита свая, скрытая под водой. Высота сваи 2 м. Свая отбрасывает на дно водоема тень длиной 0,75 м. Определите угол падения солнечных лучей на поверхность воды. Показатель преломления воды $n = \frac{4}{3}$.

Решение

1. Угол преломления из прямоугольного треугольника (см. предыдущую задачу)

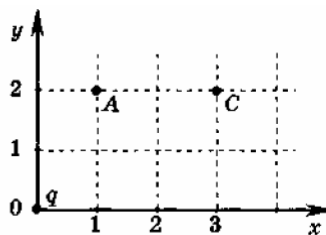
$$\text{tg} \gamma = \frac{L}{h}; \Rightarrow \gamma = \arctg \frac{L}{h} \approx 20^\circ;$$

2. Из закона преломления:

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}; \Rightarrow \alpha = \arcsin(\sin \gamma \cdot n) \approx 28^\circ;$$

№23

Точечный заряд q , помещенный в начало координат, создает в точке A (см. рисунок) электростатическое поле напряженностью $E_1 = 65 \text{ В/м}$. Определите значение модуля напряженности поля E_2 в точке C ?



Решение

1. Напряжённость электростатического поля точечного заряда, расположенного в воздухе ($\epsilon \approx 1$):

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q|}{r^2} = k \frac{|q|}{r^2};$$

$$k \approx 9 \cdot 10^9 \frac{\text{М}}{\text{Ф}};$$

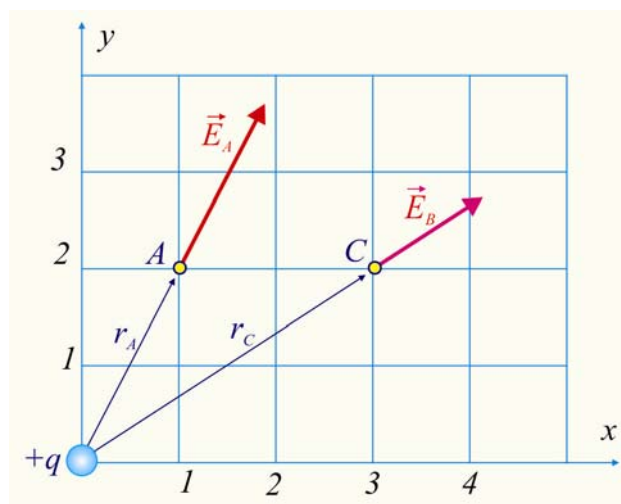
2. Квадраты расстояний от заряда до заданных точек

$$r_A^2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = 5 \text{ (y.e.)}^2$$

$$r_C^2 = \sqrt{3^2 + 2^2} = 13 \text{ (y.e.)}^2$$

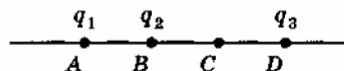
3. Напряжённости поля в заданных точках

$$\left. \begin{array}{l} E_A = k \frac{q}{r_A^2}; \\ E_C = k \frac{q}{r_C^2}; \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{E_A}{E_C} = \frac{r_C^2}{r_A^2}; \Rightarrow E_C = E_A \frac{r_A^2}{r_C^2} = 65 \frac{5}{13} = 25 \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

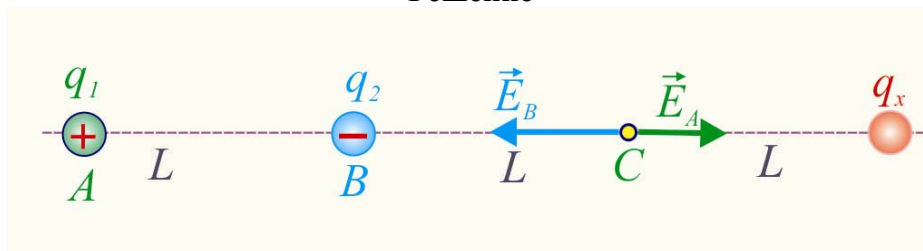


№24

Точки A , B , C и D расположены на прямой и разделены равными промежутками L (см. рисунок). В точке A помещен заряд $q_1 = 8 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}$, в точке B — заряд $q_2 = -5 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}$. Какой заряд q_3 надо поместить в точку D , чтобы напряженность поля в точке C была равна нулю?



Решение



1. Напряжённость поля в точке C будет нулевой в случае равенства нулю геометрической суммы полей всех трёх зарядов (принцип суперпозиции)

$$\vec{E}_C = \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_D = 0;$$

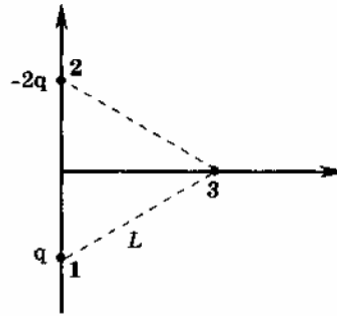
2. Условие равенства нулю напряженности поля в точке С в скалярной форме:

$$E_C = \frac{kq_2}{L^2} - \frac{kq_1}{4L^2} - \frac{kq_x}{L^2} = 0; \Rightarrow q_2 - \frac{q_1}{4} = q_x; |q_x| = 3 \cdot 10^{-12} \text{ Кл};$$

В точку D необходимо поместить отрицательный заряд $-3 \cdot 10^{-12}$ Кл.

№25

В двух вершинах (точках 1 и 2) равностороннего треугольника со стороной L (см. рисунок) помещены заряды q и $-2q$. Каковы направление и модуль вектора напряженности электрического поля в точке 3, являющейся третьей вершиной этого треугольника? Известно, что точечный заряд q создает на расстоянии L электрическое поле напряженностью $E = 10$ мВ/м.



Решение

1. Из условий задачи:

$$|\vec{E}_1| = 10 \frac{\text{В}}{\text{м}}; |\vec{E}_2| = 2|\vec{E}_1| = 20 \frac{\text{В}}{\text{м}};$$

$$\alpha = 60^\circ; \beta = 120^\circ;$$

2. Напряжённость электрического поля в точке 3:

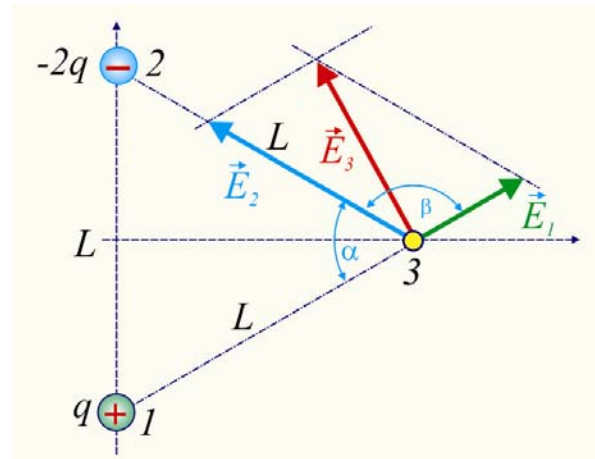
$$\vec{E}_3 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2;$$

$$|\vec{E}_3| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \beta};$$

$$|\vec{E}_3| = \sqrt{100 + 400 - 2 \cdot 200 \cdot 0,5} = 17,3 \frac{\text{мВ}}{\text{м}};$$

3. Направление результирующего вектора напряжённости:

$$(\vec{E}_3; \vec{E}_2) \approx \arctg \frac{E_1}{E_3} \approx 27^\circ;$$



№26

Электрон влетает в область однородного магнитного поля индукцией $B = 0,01$ Тл со скоростью $v \approx 1000$ км/с перпендикулярно линиям индукции. Какой путь он пройдет к тому моменту, когда вектор его скорости повернется на 1° ?

Решение

1. Условие движения электрона в магнитном поле по стационарной круговой орбите

$$evB = \frac{mv^2}{r}; \Rightarrow v = \frac{eBr}{m}; \omega r = \frac{eBr}{m}; \frac{2\pi}{T} = \frac{eB}{m}; T = \frac{2\pi m}{eB};$$

2. Время поворота электрона по орбите на $\Delta\varphi = 1^\circ$

$$\Delta t = \frac{T}{360} = \frac{2\pi m}{360eB};$$

3. Путь пройденный электроном за время Δt

$$\Delta \ell = v\Delta t = \frac{\pi mv}{180eB} \approx \frac{3,14 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^6}{180 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,01} \approx 1 \cdot 10^{-5} \text{ м} \approx 10 \text{ нм};$$

№27

Заряженный шарик влетает в область магнитного поля с индукцией $B = 0,2$ Тл, имея скорость $v = 1000$ м/с, перпендикулярную вектору индукции. Какой путь он пройдет к тому моменту, когда вектор его скорости повернется на 1° ? Масса шарика $m = 0,01$ г, заряд $q = 500$ мкКл.

Решение

1. Условие движения электрона в магнитном поле по стационарной круговой орбите

$$qvB = \frac{mv^2}{r}; \Rightarrow v = \frac{qBr}{m}; \quad \omega r = \frac{qBr}{m}; \quad \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}; \quad T = \frac{2\pi m}{qB};$$

2. Время поворота электрона по орбите на $\Delta\phi = 1^\circ$

$$\Delta t = \frac{T}{360} = \frac{2\pi m}{360qB};$$

3. Путь пройденный электроном за время Δt

$$\Delta \ell = v\Delta t = \frac{\pi mv}{180qB} \approx \frac{3,14 \cdot 1 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3}{180 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,2} \approx 1,74 \text{ м};$$

№28

Шарик массой $m = 20$ г подвешен на шелковой нити и помещен над положительно заряженной плоскостью, создающей однородное вертикальное электрическое поле напряженностью $E = 10^4$ В/м. Шарик имеет положительный заряд $q = 10^{-5}$ Кл. Период малых колебаний шарика $T = 1$ с. Какова длина нити?

Решение

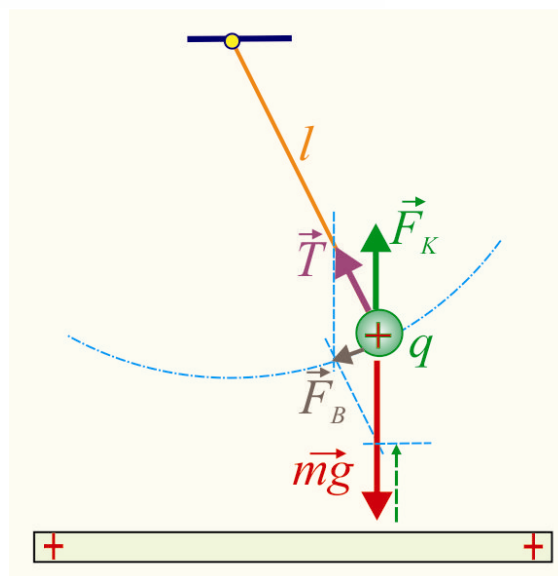
1. Вследствие действия силы Кулона гармонические собственные малые незатухающие колебания математического маятника будут протекать при действии ускорения, отличающегося по величине от ускорения свободного падения

$$ma = mg - qE; \quad a = g - \frac{qE}{m};$$

2. Период малых колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g - \frac{qE}{m}}};$$

3. Длина подвеса ℓ :



$$\ell = \frac{T^2 \left(g - \frac{qE}{m} \right)}{4\pi^2} = \frac{1 \left(10 - \frac{10^{-5} \cdot 10^4}{0,02} \right)}{39,4} \approx 0,127 \text{ м};$$

№29

Шарик массой $m = 20$ г подвешен на шелковой нити длиной $l = 10$ см. Шарик имеет положительный заряд $q = +10^{-5}$ Кл и находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 10^4$ В/м, направленном вертикально вниз. Каков период малых колебаний шарика?

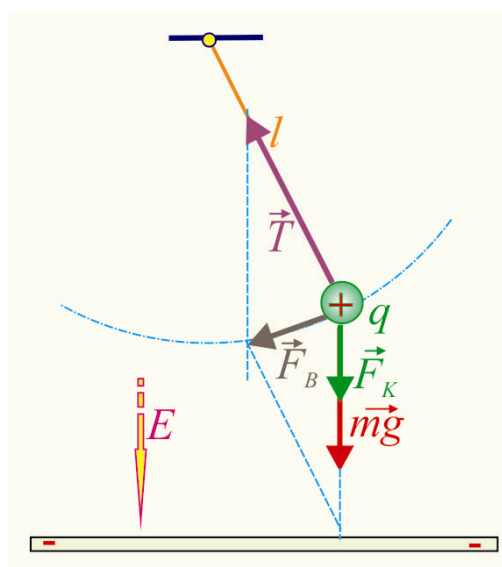
Решение

1. Вследствие действия силы Кулона гармонические собственные малые незатухающие колебания математического маятника будут протекать при действии ускорения, отличающегося по величине от ускорения свободного падения

$$ma = mg + qE; \quad a = g + \frac{qE}{m};$$

2. Период малых колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g + \frac{qE}{m}}} = 6,28 \sqrt{\frac{0,1}{10 + \frac{10^{-5} \cdot 10^4}{0,02}}} = 0,5 \text{ с};$$



№30

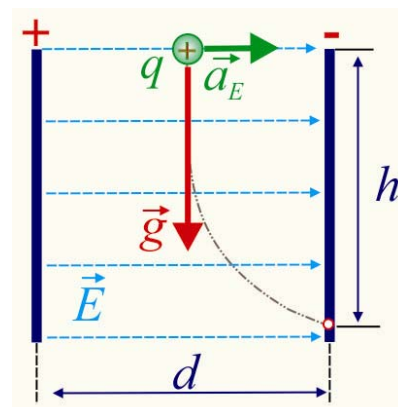
Конденсатор состоит из двух неподвижных, вертикально расположенных, длинных ($L \gg d$), параллельных, разноименно заряженных пластин. Пластины расположены на расстоянии $d = 5$ см друг от друга. Напряженность поля внутри конденсатора равна $E = 10^4$ В/м. Между пластинами на равном расстоянии от них помещен шарик с зарядом $q = 10^{-5}$ Кл и массой $m = 20$ г. После того как шарик отпустили, он начинает падать и ударяется об одну из пластин. Насколько уменьшится высота шарика Δh к моменту его удара?

Решение

1. Плоское движение точечной массы, несущей на себе заряд в стационарном электрическом поле целесообразно разложить на две составляющие: вертикальное с ускорением свободного падения g и горизонтальное с ускорением, вызванным действием на заряд силы Кулона

$$a_E = \frac{qE}{m};$$

2. Время полёта заряда будет ограничено его па-



дением на отрицательно заряженную пластину

$$\frac{d}{2} = \frac{a\tau^2}{2}; \Rightarrow \tau^2 = \frac{d}{a} = \frac{dm}{qE};$$

3. Вертикальная координата заряда по прошествии времени τ

$$h = \frac{g\tau^2}{2} = \frac{mgd}{2qE} = \frac{0,02 \cdot 10 \cdot 0,05}{2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^4} = 0,05 \text{ м} = 5 \text{ мм};$$

№31

Конденсатор состоит из двух неподвижных, вертикально расположенных, длинных, параллельных, разноименно заряженных пластин. Пластины расположены на расстоянии $d = 5$ см друг от друга. Напряженность поля внутри конденсатора равна $E = 10^4$ В/м. Между пластинами на равном расстоянии от них помещен шарик с зарядом $q = 10^{-5}$ Кл и массой $m = 20$ г. После того как шарик отпустили, он начинает падать и через некоторое время ударяется об одну из пластин. Оцените время падения Δt шарика.

Решение

1. Плоское движение точечной массы, несущей на себе заряд в стационарном электрическом поле целесообразно разложить на две составляющие: вертикальное с ускорением свободного падения g и горизонтальное с ускорением, вызванным действием на заряд силы Кулона

$$a_E = \frac{qE}{m};$$

2. Время полёта заряда будет ограничено его падением на отрицательно заряженную пластину

$$\frac{d}{2} = \frac{a\tau^2}{2}; \Rightarrow \tau^2 = \frac{d}{a} = \frac{dm}{qE}; \quad \tau = \sqrt{\frac{dm}{qE}} = \sqrt{\frac{0,05 \cdot 0,02}{10^{-4} \cdot 10^4}} = 0,1 \text{ с};$$

№32

Отрицательно заряженная пластина, создающая вертикально направленное однородное электрическое поле напряженностью $E = 10^4$ В/м, укреплена на горизонтальной плоскости. На нее с высоты $h = 10$ см падает шарик массой $m = 20$ г, имеющий положительный заряд $q = 10^{-5}$ Кл. Какой импульс шарик передаст пластине при абсолютно упругом ударе с ней?

Решение

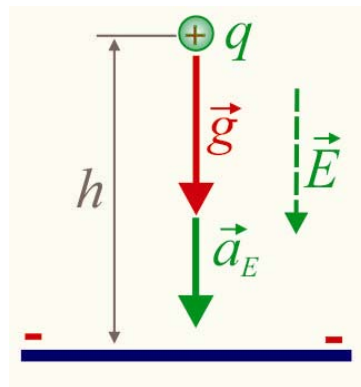
1. Ускорение, вызванное действием на заряженный шарик силы Кулона:

$$a_E = \frac{qE}{m};$$

2. Суммарное ускорение шарика:

$$a_{\Sigma} = g + a_E = g + \frac{qE}{m} = 15 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

3. Сила тяжести и сила Кулона относятся к классу консервативных сил, для которых справедлив закон со-



хранения механической энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = ma_z h; \Rightarrow v = \sqrt{2a_z h};$$

4. Модуль импульса, переданного шариком пластине при абсолютно упругом отскоке:

$$|\Delta \vec{p}| = 2mv = 2m\sqrt{2ma_z h} = 0,04\sqrt{2 \cdot 15 \cdot 0,1} \approx 0,07 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}};$$

5. При решении задачи можно воспользоваться тем обстоятельством, что гравитационное поле и электростатическое поле являются потенциальными, т.е. каждая точка пространства, занятого этими полями обладает определёнными значениями потенциальной энергии. Закон сохранения механической энергии запишется следующим образом:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh + qEh = h(mg + qE); \Rightarrow v = \sqrt{2h(mg + qE)};$$

№33

Два тонких медных проводника одинаковой l длины соединены последовательно. Диаметр первого равен d_1 , второго — d_2 . Определите отношение напряженности электростатического поля первого проводника к напряженности поля второго проводника $\frac{E_1}{E_2}$ при протекании по ним тока.

Решение

1. Напряжённость электрического поля линейного проводника в данном случае будет определяться его длиной и разностью потенциалов на его концах:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{U_1}{\ell}; \\ E_2 &= \frac{U_2}{\ell}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{U_1}{U_2};$$

2. В соответствие с законом Ома для участка цепи разность потенциалов зависит от силы тока и сопротивления проводников. По условию задачи проводники соединены последовательно, поэтому через них течёт одинаковая сила тока, следовательно, напряжённости создаваемых проводниками электрических полей будут пропорциональны их сопротивлениям:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{4\rho\ell}{\pi d_1^2}}{\frac{4\rho\ell}{\pi d_2^2}} = \frac{d_2^2}{d_1^2};$$

№34

Конденсаторы, электрическая ёмкость которых $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 10$ мкФ, заряжают до напряжения $U = 5$ В каждый, а затем «плюс» одного из них подключают к «минусу» другого и соединяют свободные выводы резистором 1000 Ом. Какое количество теплоты выделится в резисторе?

Решение

1. Последовательно соединённые конденсаторы обладают общей ёмкостью

$$C_0 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \approx 1,67 \text{ мкФ},$$

между пластинами, соединёнными с резистором, разность потенциалов определится в виде суммы:

$$U_0 = 2U;$$

2. Энергия конденсаторов после их соединения :

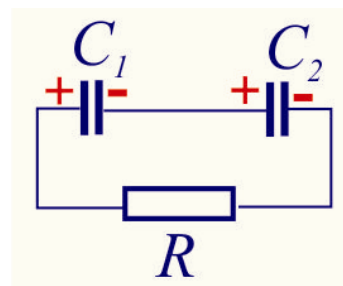
$$W_0 = \frac{C_0 U_0^2}{2} \approx 8,35 \cdot 10^{-5} \text{ Дж};$$

3. Суммарная энергия конденсаторов до их соединения:

$$W_1 = \frac{C_1 U^2}{2} + \frac{C_2 U^2}{2} = \frac{C_1 + C_2}{2} U^2 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж};$$

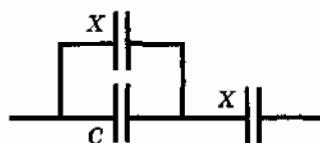
4. Количество теплоты, выделенное в резисторе:

$$\Delta W = W_1 - W_0 \approx 67 \text{ мкДж};$$



№35

К конденсатору, электрическая ёмкость которого $C = 16 \text{ пФ}$, подключают два одинаковых конденсатора ёмкостью X : один — параллельно, а второй — последовательно (см. рисунок). Ёмкость образовавшейся батареи конденсаторов равна ёмкости C . Какова ёмкость X ?



Решение

1. Ёмкость заданного соединения конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{X} + \frac{1}{C+X}; \quad \frac{1}{C} = \frac{C+X+X}{X(C+X)}; \quad C = \frac{X(C+X)}{C+2X};$$

2. Разрешим полученное уравнение относительно X :

$$C^2 + 2CX = CX + X^2; \quad \Rightarrow \quad X^2 - CX - C^2 = 0;$$

$$X_{1,2} = \frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} + C^2}; \quad X = \frac{C}{2} + \frac{C}{2} \sqrt{5} \approx 25,9 \text{ пФ};$$

№36

Конденсатор, электрическая ёмкость которого $C_1 = 5 \text{ мкФ}$, заряжен так, что разность потенциалов между его пластинами $U_1 = 120 \text{ В}$. Второй конденсатор, электрическая ёмкость которого $C_2 = 7 \text{ мкФ}$, имеет разность потенциалов между пластинами $U_2 = 240 \text{ В}$. Одноименно заряженные пластины конденсаторов попарно соединили проводниками. Вычислите модуль разности потенциалов U между пластинами каждого конденсатора после соединения?

Решение

1. Каждый из конденсаторов до их соединения имеет заряд:

$$q_1 = C_1 U_1; \quad q_2 = C_2 U_2;$$

2. При параллельном соединении конденсаторов, отключенных от источника, заряд сохраняется:

$$q_0 = q_1 + q_2 = C_1 U_1 + C_2 U_2;$$

3. Электрическая ёмкость соединения:

$$C_0 = C_1 + C_2;$$

4. При параллельном соединении пластин двух конденсаторов разность потенциалов между ними будет одинаковой

$$U_0 = \frac{q_0}{C_0} = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2} = \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 120 + 7 \cdot 10^{-6} \cdot 240}{12 \cdot 10^{-6}} = 190 \text{ В};$$

№37

Чему равен период электромагнитных колебаний в колебательном контуре, если амплитуда силы тока равна I_m , а амплитуда электрического заряда на пластинах конденсатора равна q_m .

Решение

1. Законы изменения заряда и силы тока в колебательном LC-контуре:

$$q(t) = q_m \sin \omega t; \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = q_m \omega \cos \omega t = i_m \cos \omega t;$$

$$i_m = q_m \omega = q_m \frac{2\pi}{T}; \quad \therefore \Rightarrow \quad T = 2\pi \frac{q_m}{i_m};$$

№38

В процессе колебаний в идеальном колебательном контуре в момент времени t заряд конденсатора $q = 4 \cdot 10^{-9}$ Кл, а сила тока в катушке $I = 3$ мА. Период колебаний $T = 6,3 \cdot 10^{-6}$ с. Определите амплитуду колебаний заряда.

Решение

1. Для идеального колебательного LC-контра справедлив закон сохранения энергии

$$W_E + W_B = W_{E(\max)} = W_{B(\max)}; \quad \Rightarrow \quad \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C}; \quad q_m^2 = i^2 LC + q^2;$$

2. Величину LC определим по заданному периоду колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}; \quad \Rightarrow \quad LC = \frac{T^2}{4\pi^2};$$

3. Подставим значение LC в уравнение q_m

$$q_m = \sqrt{q^2 + \frac{i^2 T^2}{4\pi^2}} = \sqrt{16 \cdot 10^{-18} + \frac{25 \cdot 10^{-6} \cdot 4,4 \cdot 10^{-11}}{39,4}} \approx 5,4 \text{ нКл};$$

№39

В идеальном колебательном контуре амплитуда силы тока в катушке индуктивности $I_m = 5$ мА, а амплитуда напряжения на конденсаторе $U_m = 2,0$ В. В момент времени t сила тока в катушке $I = 3$ мА. Определите напряжение на конденсаторе в этот момент.

Решение

1. Закон сохранения энергии для идеального колебательного контура:

$$\frac{Cu^2}{2} + \frac{Li^2}{2} = \frac{Cu_m^2}{2}; \Rightarrow u^2 = u_m^2 - \frac{L}{C} i^2;$$

2. Величину L/C определим из равенства максимальных значений магнитной и электрической энергий

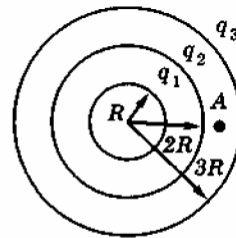
$$\frac{Cu_m^2}{2} = \frac{Li_m^2}{2}; \Rightarrow \frac{L}{C} = \frac{u_m^2}{i_m^2};$$

3. Напряжение на конденсаторе в заданный момент времени:

$$u^2 = u_m^2 - \frac{u_m^2}{i_m^2} i^2; \Rightarrow u = u_m \sqrt{1 - \frac{i^2}{i_m^2}} = 2 \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = 1,6 \text{ В};$$

№40

Точечный заряд q создает на расстоянии R электрическое поле с напряженностью $E_0 = 63$ В/м. Три концентрические сферы радиусами R , $2R$ и $3R$ несут равномерно распределенные по их поверхностям заряды $q_1 = +2q$, $q_2 = -q$ и $q_3 = +q$ соответственно (см. рис.). Чему равно значение напряженности поля в точке А, отстоящей от центра сфер на расстояние $2,5R$?



Решение

1. Анализ электрических полей может быть упрощён при использовании специальной теоремы Остроградского – Гаусса. Математическая формулировка теоремы впервые была получена Михаилом Васильевичем Остроградским (1801 – 1862) академиком Петербургской Академии Наук, и адаптирована к электрическим полям немецким учёным Карлом Фридрихом Гауссом (1777 – 1855).

2. Для формулировки теоремы в системе единиц СИ необходимо ввести новую векторную величину – электрическое смещение, которая определяется следующим соотношением

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}.$$

3. Электрическое смещение в вакууме или сухом воздухе равно произведению электрической постоянной ϵ_0 на вектор напряжённости электрического поля в данной точке пространства. Вектор электрического смещения по направлению совпадает с направлением вектора напряжённости и для точечного заряда, расположенного в вакууме или воздухе модуль смещения определится уравнением

$$D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}; \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = k \frac{q}{r^2};$$

4. Векторное поле электрического смещения удобно характеризовать потоком. Для определения потока выделим в пространстве, занятом электрическим полем плоскую поверхность площадью S , построим внешнюю к ней нормаль $\vec{n}$. Поток вектора электрического смещения в этом случае определится традиционным уравнением

$$\Phi_D = DS \cos(\vec{D}; \vec{n}) = SD_n,$$

где D_n – проекция вектора смещения на внешнюю нормаль. Густота линий электрического смещения численно равна модулю D . В случае неоднородного поля поток смещения вычисляется путём интегрирования по поверхности S

$$\Phi_D = \int_S D_n dS.$$

5. Анализируя уравнение можно отметить, что поток смещения может быть при прочих равных условиях положительным, отрицательным и нулевым, в зависимости от значения $\cos(\vec{D}; \vec{n})$. В случае $\cos(\vec{D}; \vec{n}) < \pi/2$ поток будет положительным, при $\cos(\vec{D}; \vec{n}) = \pi/2$ поток будет нулевым, т.к. линии смещения не будут пересекать выделенную площадку.

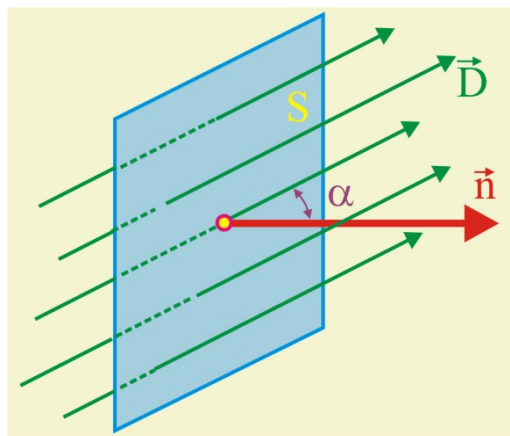
6. Поместим положительный точечный заряд q в центр виртуальной сферической области площадью S и определим величину потока смещения через поверхность этой сферы радиусом R с учётом того, что во всех точках пересечения линий смещения они будут совпадать с направлением внешней нормали, т.е. $\cos(\vec{D}; \vec{n}) = 1$

$$\Phi_D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = q.$$

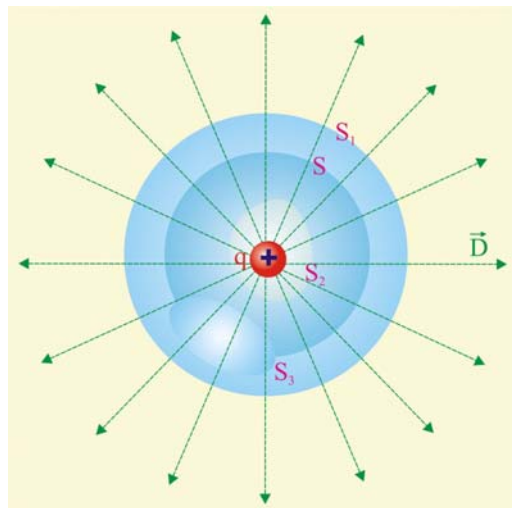
Поскольку из уравнения потока исчез радиус сферы, то уравнение можно распространить на любую концентрическую сферу, охватывающую заряд q , например, на сферу S_1 и произвольную замкнутую поверхность S_2 . Если замкнутая поверхность не охватывает заряд, как S_3 , то поток через неё будет

равен нулю, потому что число линий смещения, входящих в поверхность S_3 будет при любой величине заряда равно числу выходящих линий, причём для входящих линий поток будет отрицательным, а для выходящих – положительным, что и обеспечивает суммарный нулевой поток через эту не охватывающую заряд поверхность.

7. Математическое выражение теоремы Остроградского – Гаусса, на основании проведенного выше рассмотрения можно представить в общем виде следующим образом



. Поток электрического смещения



Теорема Остроградского – Гаусса

$$\Phi_D = \int_S D_n dS = q.$$

8. Поток электрического смещения через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме всех зарядов, располагающихся внутри поверхности.

9. При формулировке теоремы в основу рассуждений был положен закон Кулона, в этой связи теорему Остроградского – Гаусса можно рассматривать как следствие этого закона. Как очевидно из записанных уравнений, единицами измерениями потока электрического смещения являются единицы электрического заряда, т.е. – Кл. Электрическое смещение таким образом можно определить как величину потока, приходящуюся на заданную площадь поверхности. Другими словами, единицей электрического смещения будет являться Кл/м².

10. В соответствии с теоремой Остроградского – Гаусса напряженность в заданной точке будут создавать только две сферы радиусами R и 2R, алгебраическая сумма зарядов в центре этих сфер будет равна

$$q_\Sigma = 2q - q = q;$$

11. Относительную величину заряда определим по заданной напряжённости E₀

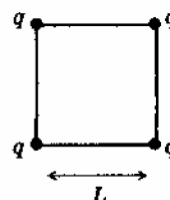
$$E_0 = k \frac{q}{R^2}; \Rightarrow q = \frac{E_0 R^2}{k};$$

12. Напряжённость поля в заданной точке A, отстоящей от центра сфер на расстоянии 2,5 R

$$E_A = k \frac{q}{(2,5R)^2} = k \frac{E_0 R^2}{6,26kR^2} = \frac{E_0}{6,25} = 10 \frac{В}{м};$$

№41

Четыре одинаковых заряда q расположены в одной плоскости в вершинах квадрата со стороной L и удерживаются в равновесии связывающими их не проводящими ток нитями (см. рисунок). Сила отталкивания соседних зарядов $F_0 = 20 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$. Чему равно натяжение каждой из нитей T ?



Решение

1. Натяжение нити в данном случае равно геометрической сумме всех приложенных к заряду сил. Модуль силы натяжения определится как:

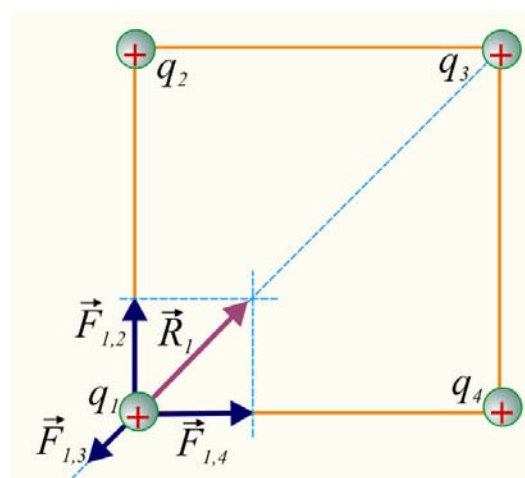
$$T \cos 45^\circ = R_1 - F_{1,3};$$

2. Определим модули сил, входящих в уравнение натяжения, при условии:

$$|\vec{F}_{1,2}| = |\vec{F}_{1,4}| = |\vec{F}_0|;$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_0^2 + F_0^2} = F_0 \sqrt{2};$$

$$|F_{1,3}| = k \frac{q_1 q_3}{(\sqrt{2}L)^2} = \frac{F_0}{2}; \Rightarrow T = \frac{F_0(\sqrt{2} - 0,5)}{0,707} \approx 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ Н};$$



№42

Плоская горизонтальная фигура площадью $S = 0,1 \text{ м}^2$, ограниченная проводящим контуром, сопротивление которого $R = 5 \text{ Ом}$, находится в однородном магнитном поле. Какой заряд протечет по контуру за большой промежуток времени, пока проекция магнитной индукции на вертикаль равномерно меняется с $B_{1z} = 2 \text{ Тл}$ до $B_{2z} = -2 \text{ Тл}$?

Решение

1. Закон электромагнитной индукции Майкла Фарадея:

$$|\varepsilon_i| = \left| \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} \right|; \quad \Phi_B = BS \cos(\vec{B}; \vec{n}), \quad (\vec{B}; \vec{n}) = 0^\circ; \quad \Delta \Phi_B = \Delta BS;$$

$$\Delta B = 4 \text{ Тл}; \quad |\varepsilon_i| = \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right| S;$$

2. Заряд, сила тока в контуре и ЭДС индукции связаны соотношениями:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{|\varepsilon_i|}{R}; \quad \Rightarrow \quad \Delta q = \frac{|\varepsilon_i|}{R} \Delta t = \frac{S}{R} \Delta B = \frac{0,1}{5} \cdot 4 = 0,08 \text{ Кл};$$

№43

Плоская горизонтальная фигура, ограниченная проводящим контуром, сопротивление которого $R = 5 \text{ Ом}$, находится в однородном магнитном поле. За большой промежуток времени, пока проекция магнитной индукции на вертикаль z равномерно меняется от $B_{1z} = 2 \text{ Тл}$ до $B_{2z} = -2 \text{ Тл}$, по контуру протекает заряд $\Delta q = 0,08 \text{ Кл}$. Найдите площадь фигуры.

Решение

1. Закон электромагнитной индукции Майкла Фарадея:

$$|\varepsilon_i| = \left| \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} \right|; \quad \Phi_B = BS \cos(\vec{B}; \vec{n}), \quad (\vec{B}; \vec{n}) = 0^\circ; \quad \Delta \Phi_B = \Delta BS;$$

$$\Delta B = 4 \text{ Тл}; \quad |\varepsilon_i| = \left| \frac{\Delta B}{\Delta t} \right| S;$$

2. Заряд, сила тока в контуре и ЭДС индукции связаны соотношениями:

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{|\varepsilon_i|}{R}; \quad \Rightarrow \quad \Delta q = \frac{|\varepsilon_i|}{R} \Delta t = \frac{S}{R} \Delta B;$$

откуда:

$$S = \frac{R |\Delta q|}{\Delta B} = \frac{5 \cdot 0,08}{4} = 0,1 \text{ м}^2;$$

№44

Для «просветления» оптики на поверхность линзы наносят тонкую пленку с показателем преломления 1,25. Какой должна быть минимальная толщина пленки, чтобы свет длиной волны 600 нм из воздуха полностью проходил через пленку? (Показатель преломления пленки меньше показателя преломления стекла линзы.)

Решение



1. Оптическая разность хода лучей при показателе преломления плёнки n и её толщине d определится как:

$$\Delta = 2dn;$$

2. Минимум интенсивности в отражённом свете (почти вся энергия световой волны данной длины проникает в стекло) имеет место при:

$$\Delta = \frac{\lambda}{2}; \Rightarrow 2dn = \frac{\lambda}{2}; \Rightarrow \lambda = \frac{\lambda}{4n} = 120\text{ нм};$$

17.40. В опыте Юнга стеклянная пластинка толщиной $h = 12$ см помещается перпендикулярно на пути одного из интерферирующих лучей. На сколько могут отличаться друг от друга показатели преломления в различных местах пластинки, чтобы разность оптического хода от такой неоднородности не превышало $\Delta = 1$ мкм?

Решение

1. Определим разность хода лучей для двух значений показателей преломления n_1 и n_2

$$\Delta_1 = h(n_1 - 1); \quad \Delta_2 = h(n_2 - 1);$$

2. По условию задачи

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = h(n_1 - 1) - h(n_2 - 1) = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

откуда следует, что:

$$\Delta n = n_1 - n_2 = \frac{\Delta}{h} \cong 5 \cdot 10^{-5}.$$

45. На мыльную плёнку падает белый свет под углом $j = 45^\circ$ к поверхности. При какой наименьшей толщине плёнки отражённые лучи будут окрашены в радикально жёлтый цвет с $\lambda = 600$ нм, если показатель преломления мыльной воды $n = 1,33$?

Решение

1. Максимум отражения от плёнки имеет место, когда лучи отражённые от нижней и верхней поверхности плёнки, т.е. интерферирующие лучи складываясь, усиливают друг друга. Для этого оптическая разность хода этих лучей Δd должна быть равна целому числу k длин волн

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2} + n(AC + BC) - AD = k\lambda;$$

2. Слагаемое $\lambda/2$ учитывает, что при отражении световой волны от более плотной среды фаза колебаний меняется на противоположную по знаку. Множитель в виде коэффициента преломления n учитывает уменьшение скорости света на пути следования луча s , при этом так же возникает такое же изменение фазы колебаний

$$\Delta\varphi = \frac{\omega s}{v} = \frac{n\omega s}{c};$$

3. Запишем следующие тригонометрические соотношения:

$$AB = AC = \frac{h}{\cos r}; \quad AD = 2h \sin j \cdot \operatorname{tgr};$$

4. Используя закон преломления света, получим:

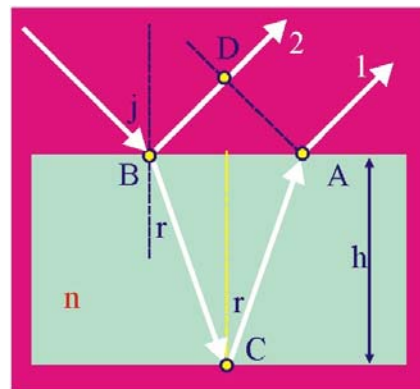
$$\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 j},$$

откуда

$$h = \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 j}};$$

5. Минимальная толщина плёнки будет иметь место при $k = 1$

$$h_{\min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 j}} \cong 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ м};$$



Толщина мыльной плёнки

46 Мыльная плёнка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекания жидкости. При наблюдении интерференционных полос в отражённом свете ртутной дуги ($\lambda = 546,1 \text{ нм}$) обнаружилось, что расстояние между пятью полосами $x = 2 \text{ мм}$. Найти угол γ клина. Свет падает перпендикулярно к поверхности плёнки. Показатель преломления мыльной воды $n = 1,33$.

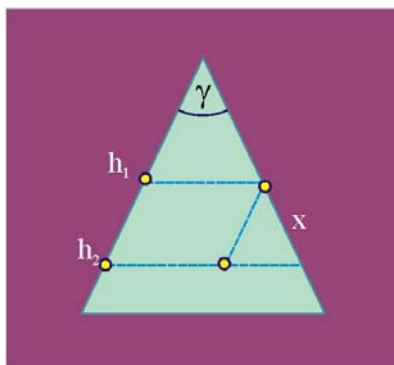


Рис. 17.42. Вертикальная плёнка

Решение

1. Световые волны, падающие на прозрачную плёнку, частично проникают в неё, а частично отражаются как от верхней поверхности, так и от нижней поверхности. Волны приобретают оптическую разность хода, величина которого зависит от толщины плёнки, от показателя преломления и угла падения.

2. В заданном случае свет падает перпендикулярно к поверхности плёнки, толщина которой всюду мала. Это даёт основание считать, что в отра-

жённом свете (сверху) интерференционная картинка будет локализована на верхней поверхности клина.

3. Предположим, что h_1 и h_2 толщина плёнки, соответствующая разным интерференционным полосам, в этом случае

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{\lambda}{2n};$$

4. Полагая угол γ малым, можно принять

$$\Delta h = x \operatorname{tg} \gamma; \Rightarrow \operatorname{tg} \gamma = \frac{k\lambda}{2nx};$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{k\lambda}{2nx} \cong \operatorname{arctg} \frac{5 \cdot 5,461 \cdot 10^{-7}}{2,66 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} \cong \operatorname{arctg}(5,13 \cdot 10^{-5});$$

$$\gamma \cong 11''.$$

47. Мыльная плёнка, расположенная вертикально, вследствие стекания образует клин. Интерференция наблюдается в отражённом свете через красный светофильтр ($\lambda_1 = 631$ нм). Расстояния между соседними полосами равны $x_1 = 3$ мм. Затем интерференционная картинка наблюдалась через синий светофильтр ($\lambda_2 = 400$ нм). Определить расстояние между двумя синими полосами x_2 , считая что свет падает на поверхность плёнки нормально поверхности и форма плёнки не меняется.

Решение

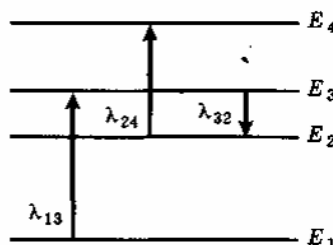
1. Приняв угол клина γ малым, по аналогии с предыдущей задачей можно записать:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{k\lambda_1}{2nx_1} = \frac{k\lambda_2}{2nx_2}; \Rightarrow x_2 = \frac{x_1\lambda_2}{\lambda_1} \cong 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

Квантовая физика

№1

На рисунке приведена схема энергетических уровней атома и указаны длины волн фотонов, излучаемых и поглощаемых при переходах с одного уровня на другой. Чему равна длина волны для фотонов, излучаемых при переходе с уровня E_4 на уровень E_1 , если $\lambda_{13} = 400$ нм, $\lambda_{24} = 500$ нм, $\lambda_{32} = 600$ нм?



Решение

1. В соответствии со вторым постулатом Бора частота испускаемого (поглощаемого) фотона при переходе с одного разрешённого уровня на другой, пропорциональна разности энергий уровней

$$\varepsilon_f = h\nu = E_n - E_m,$$

следовательно, надо определить частоты заданных переходов, потому что:

$$\lambda_{4-1} = \frac{c}{\nu_{4-1}}; \quad \nu_{4-1} = \nu_{1-3} + \nu_{2-4} - \nu_{3-2};$$

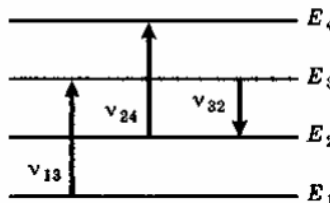
$$\left. \begin{aligned} \nu_{1-3} &= \frac{c}{\lambda_{1-3}} = \frac{3 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^{-7}} = 7,5 \cdot 10^{14} \text{ Гц}; \\ \nu_{2-4} &= \frac{c}{\lambda_{2-4}} = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^{-7}} = 6 \cdot 10^{14} \text{ Гц}; \\ \nu_{3-2} &= \frac{c}{\lambda_{3-2}} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Гц}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nu_{4-1} = 8,5 \cdot 10^{14} \text{ Гц};$$

2. Искомая длина волны:

$$\lambda_{4-1} = \frac{c}{\nu_{4-1}} = \frac{3 \cdot 10^8}{8,5 \cdot 10^{14}} = 3,52 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 352 \text{ нм};$$

№2

На рисунке представлена схема энергетических уровней электронной оболочки атома и указаны частоты фотонов, излучаемых и поглощаемых при переходах между этими уровнями. Какова **минимальная** длина волны фотонов, излучаемых атомом при **любых возможных переходах** между уровнями E_1 , E_2 , E_3 и E_4 , если $\nu_{13} = 7 \cdot 10^{14}$ Гц, $\nu_{24} = 5 \cdot 10^{14}$ Гц, $\nu_{32} = 3 \cdot 10^{14}$ Гц?



Решение

1. Минимальная длина волны соответствует максимальной частоте. 1. В соответствии со вторым постулатом Бора частота испускаемого (поглощаемого) фотона при переходе с одного разрешённого уровня на другой, пропорциональна разности энергий уровней

$$\varepsilon_f = h\nu = E_n - E_m, \quad \varepsilon_{f(\max)} = E_4 - E_1 = h\nu_{4-1};$$

следовательно, надо определить частоты заданных переходов, потому что:

$$\nu_{4-1} = \nu_{1-3} + \nu_{2-4} - \nu_{3-2} = 10^4(7 + 5 - 3) = 9 \cdot 10^{14} \text{ Гц};$$

2. Минимальная длина волны, соответствующая заданной схеме:

$$\lambda_{1-4} = \frac{c}{\nu_{1-4}} = \frac{3 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^{14}} \approx 3,33 \cdot 10^{-7} \text{ м} \approx 333 \text{ нм};$$

№3

Ядро покоящегося нейтрального атома, находясь в однородном магнитном поле, испытывает α -распад. При этом рождаются α -частица и тяжелый ион нового элемента. Выделившаяся при α -распаде энергия ΔE целиком переходит в кинетическую энергию продуктов реакции. Трек α -частицы находится в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля. Начальная часть трека напоминает дугу окружности радиусом r . Масса α -частицы равна m_α , ее заряд равен $2e$, масса тяжелого иона равна M . Определите значение модуля индукции B магнитного поля.

Решение

1. Условие нахождения заряженной частицы в магнитном поле на стационарной круговой орбите радиусом r

$$\frac{m_\alpha v^2}{r} = 2evB; \Rightarrow B = \frac{m_\alpha v}{2er},$$

таким образом, задача сводится к определению скорости движения α -частицы по отрезку круговой орбиты.

2. Скорость α -частицы определится при совместном использовании закона сохранения импульса и закона сохранения энергии:

$$\left. \begin{aligned} \Delta E &= \frac{Mu^2}{2} + \frac{m_\alpha v^2}{2}; \\ Mu &= m_\alpha v; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \Delta E &= \frac{M}{2} \frac{m_\alpha^2 v^2}{M^2} + \frac{m_\alpha v^2}{2}; \\ u &= \frac{m_\alpha v}{M}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\Delta E = \frac{m_\alpha^2 v^2}{M} + m_\alpha v^2;$$

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta E}{m_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{M} + 1 \right)}}; \Rightarrow B = \frac{1}{2er} \sqrt{\frac{2m_\alpha \Delta E}{1 + \frac{m_\alpha}{M}}};$$

№4

Ядро покоящегося нейтрального атома, находясь в однородном магнитном поле индукцией B , испытывает α -распад. При этом рождаются α -частица и тяжелый ион нового элемента. Трек тяжелого иона находится в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля. Начальная часть трека напоминает дугу окружности радиусом R . Выделившаяся при α -распаде энергия ΔE целиком переходит в кинетическую энергию продуктов реакции. Масса α -частицы равна m_α , ее заряд равен $2e$. Определите значение модуля отношения заряда к массе $\left| \frac{q}{M} \right|$ для тяжелого иона.

Решение

1. Условие нахождения заряженной частицы в магнитном поле на стационарной круговой орбите радиусом r

$$\frac{m_\alpha v^2}{r} = 2evB; \Rightarrow v = \frac{2eBr}{m_\alpha};$$

таким образом, задача сводится к определению скорости движения α -частицы по отрезку круговой орбиты.

2. Скорость α -частицы определится при совместном использовании закона сохранения импульса и закона сохранения энергии:

$$\left. \begin{aligned} \Delta E &= \frac{Mu^2}{2} + \frac{m_\alpha v^2}{2}; \\ Mu &= m_\alpha v; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \Delta E &= \frac{M}{2} \frac{m_\alpha^2 v^2}{M^2} + \frac{m_\alpha v^2}{2}; \\ u &= \frac{m_\alpha v}{M}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\Delta E = \frac{m_\alpha^2 v^2}{M} + m_\alpha v^2;$$

$$v^2 = \frac{2\Delta E}{m_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{M} + 1 \right)} = \frac{(2eBr)^2}{m_\alpha^2}; \Rightarrow \left| \frac{2e}{M} \right| = \frac{2e}{m_\alpha} \left(\frac{2m_\alpha \Delta E}{4e^2 B^2 r^2} - 1 \right);$$

№5

Ядро покоящегося нейтрального атома, находясь в однородном магнитном поле, испытывает α -распад. При этом рождаются α -частица и тяжелый ион нового элемента. Выделившаяся при α -распаде энергия ΔE целиком переходит в кинетическую энергию продуктов реакции. Трек тяжелого иона находится в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля. Начальная часть трека напоминает дугу окружности радиусом R . Масса α -частицы равна m_α , ее заряд равен $2e$, масса тяжелого иона равна M . Определите значение модуля индукции B магнитного поля.

Решение

1. Условие нахождения заряженной частицы в магнитном поле на стационарной круговой орбите радиусом r

$$\frac{m_\alpha v^2}{r} = 2evB; \Rightarrow B = \frac{m_\alpha v}{2er},$$

таким образом, задача сводится к определению скорости движения α -частицы по отрезку круговой орбиты.

2. Скорость α -частицы определится при совместном использовании закона сохранения импульса и закона сохранения энергии:

$$\left. \begin{aligned} \Delta E &= \frac{Mu^2}{2} + \frac{m_\alpha v^2}{2}; \\ Mu &= m_\alpha v; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \Delta E &= \frac{M}{2} \frac{m_\alpha^2 v^2}{M^2} + \frac{m_\alpha v^2}{2}; \\ u &= \frac{m_\alpha v}{M}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\Delta E = \frac{m_\alpha^2 v^2}{M} + m_\alpha v^2;$$

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta E}{m_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{M} + 1 \right)}}; \Rightarrow v = \frac{1}{2er} \sqrt{\frac{2m_\alpha \Delta E}{1 + \frac{m_\alpha}{M}}};$$

№6

Препарат активностью $1,7 \cdot 10^{11}$ частиц в секунду помещен в медный контейнер массой 0,5 кг. За какое время температура контейнера повышается на 1 К, если известно, что данное радиоактивное вещество испускает α -частицы энергией 5,3 МэВ? Считать, что энергия всех α -частиц полностью переходит во внутреннюю энергию. Теплоемкостью препарата и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Решение

1. Количество теплоты необходимое для нагревания контейнера на $\Delta T = 1$ К

$$Q = cm\Delta T;$$

2. Энергия выделяемая α -частицами за время τ

$$W_\alpha = A\varepsilon_\alpha \tau; \Rightarrow \tau = \frac{W_\alpha}{A\varepsilon_\alpha};$$

3. По условию задачи:

$$W_\alpha \approx Q; \Rightarrow \tau = \frac{cm\Delta T}{A\varepsilon_\alpha} \approx \frac{385 \cdot 0,5 \cdot 1}{1,7 \cdot 10^{11} \cdot 5,3 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 22,25 \text{ мин};$$

№7

Радиоактивный препарат помещен в медный контейнер массой 0,5 кг. За 2 ч температура контейнера повысилась на 5,2 К. Известно, что данный препарат испускает α -частицы энергией 5,3 МэВ, причем энергия всех α -частиц полностью переходит во внутреннюю энергию. Определите активность препарата A , т.е. количество α -частиц, рождающихся в нем за 1 с. Теплоемкостью препарата и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Решение

1. Количество теплоты необходимое для нагревания контейнера на $\Delta T = 1$ К

$$Q = cm\Delta T;$$

2. Энергия выделяемая α -частицами за время τ

$$W_\alpha = A\varepsilon_\alpha \tau; \Rightarrow \tau = \frac{W_\alpha}{A\varepsilon_\alpha};$$

3. По условию задачи:

$$W_{\alpha} \approx Q; \Rightarrow cm\Delta T = A\varepsilon_{\alpha}\tau; \Rightarrow A = \frac{cm\Delta T}{\varepsilon_{\alpha}\tau} \approx \frac{385 \cdot 0,5 \cdot 5,2}{5,3 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 7200} \approx 1,64 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1};$$

№8

Для разгона космических аппаратов и коррекции их орбит предложено использовать солнечный парус — скрепленный с аппаратом легкий экран большой площади из тонкой пленки, которая зеркально отражает солнечный свет. Какой должна быть площадь паруса S , чтобы аппарат массой $m = 500 \text{ кг}$ (включая массу паруса) имел ускорение $10^{-4}g$? Мощность солнечного излучения, падающего на 1 м^2 поверхности, перпендикулярной солнечным лучам, составляет $W = 370 \text{ Вт/м}^2$.

Решение

1. Давление света при его зеркальном отражении:

$$p = \frac{2W}{c};$$

2. Сила давления света на зеркальную поверхность:

$$F = pS = \frac{2WS}{c};$$

3. В соответствии со вторым законом Ньютона:

$$F = ma; \quad \frac{2WS}{c} = ma; \Rightarrow S = \frac{mac}{2W} = \frac{500 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^8}{740} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ м}^2;$$

№9

Для разгона космических аппаратов и коррекции их орбит предложено использовать солнечный парус — скрепленный с аппаратом легкий экран большой площади из тонкой пленки, которая зеркально отражает солнечный свет. Рассчитайте массу космического аппарата, снабженного парусом в форме квадрата размерами $100 \text{ м} \times 100 \text{ м}$, которому давление солнечных лучей сообщает ускорение $10^{-4}g$. Мощность W солнечного излучения, падающего на 1 м^2 поверхности, перпендикулярной солнечным лучам, составляет 1370 Вт/м^2 .

Решение

1. Давление света при его зеркальном отражении:

$$p = \frac{2W}{c};$$

2. Сила давления света на зеркальную поверхность:

$$F = pS = \frac{2WS}{c};$$

3. В соответствии со вторым законом Ньютона:

$$F = ma; \quad \frac{2WS}{c} = ma; \Rightarrow m = \frac{2WS}{ca} \approx \frac{2740 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-3}} \approx 91,3 \text{ кг};$$

№10

Фотокатод облучают светом с длиной волны $\lambda = 300$ нм. Красная граница фотоэффекта для вещества фотокатода $\lambda_0 = 450$ нм. Какое напряжение U нужно создать между анодом и катодом, чтобы фототок прекратился?

Решение

1. Уравнение внешнего фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{mv^2}{2} + A;$$

2. Красная граница фотоэффекта позволяет определить значение работы выхода данного фотокатода:

$$A = \frac{hc}{\lambda_0};$$

3. Задерживающий потенциал:

$$\frac{mv^2}{2} = eU;$$

4. Уравнение внешнего фотоэффекта, соответствующее заданным условиям:

$$\frac{hc}{\lambda} = eU + \frac{hc}{\lambda_0}; \Rightarrow U = \frac{hc}{e} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} \right) \approx \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,6 \cdot 10^{-19}} \left(\frac{1}{3 \cdot 10^{-7}} - \frac{1}{4,5 \cdot 10^{-7}} \right) \approx 1,37 \text{ В};$$

№11

Красная граница фотоэффекта для вещества фотокатода $\lambda_0 = 450$ нм. При облучении катода светом с длиной волны λ фототок прекращается при напряжении между анодом и катодом $U = 1,4$ В. Определите длину волны λ .

Решение

1. Уравнение внешнего фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{mv^2}{2} + A;$$

2. Красная граница фотоэффекта позволяет определить значение работы выхода данного фотокатода:

$$A = \frac{hc}{\lambda_0};$$

3. Задерживающий потенциал:

$$\frac{mv^2}{2} = eU;$$

4. Уравнение внешнего фотоэффекта, соответствующее заданным условиям:

$$\frac{hc}{\lambda} = eU + \frac{hc}{\lambda_0}; \Rightarrow \lambda = \frac{hc\lambda_0}{hc + eU\lambda_0} \approx 300 \text{ нм};$$

№12

При облучении катода светом с длиной волны $\lambda = 300$ нм фототок прекращается при напряжении между анодом и катодом $U = 1,4$ В. Определите красную границу фотоэффекта λ_0 для вещества фотокатода.

Решение

1. Уравнение внешнего фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{mv^2}{2} + A;$$

2. Красная граница фотоэффекта позволяет определить значение работы выхода данного фотокатода:

$$A = \frac{hc}{\lambda_0};$$

3. Задерживающий потенциал:

$$\frac{mv^2}{2} = eU;$$

4. Уравнение внешнего фотоэффекта, соответствующее заданным условиям:

$$\frac{hc}{\lambda} = eU + \frac{hc}{\lambda_0}; \Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc\lambda}{hc - eU\lambda} \approx 450 \text{ нм};$$

№13

Фотокатод, покрытый кальцием (работа выхода $A = 4,42 \cdot 10^{-19}$ Дж), освещается светом с длиной волны $\lambda = 300$ нм. Вылетевшие из катода электроны попадают в однородное магнитное поле с индукцией $B = 8,3 \cdot 10^{-4}$ Тл перпендикулярно линиям индукции этого поля. Рассчитайте максимальный радиус окружности R , по которой движутся электроны?

Решение

1. Условие нахождения заряженной частицы в магнитном поле на стационарной круговой орбите радиусом r

$$\frac{mv^2}{r} = evB; \Rightarrow r = \frac{mv}{eB};$$

2. Скорость фотоэлектронов определится из уравнения внешнего фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{mv^2}{2} + A; \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} - A = \frac{mv^2}{2}; \quad v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{hc}{\lambda} - A \right)};$$

3. Максимальный радиус окружности, по которой фотоэлектроны движутся в магнитном поле:

$$r = \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{hc}{\lambda} - A \right)} = \frac{\sqrt{2m \left(\frac{hc}{\lambda} - A \right)}}{eB} \approx \frac{\sqrt{2 \cdot 10^{-30} \left(\frac{2 \cdot 10^{-25}}{3 \cdot 10^{-7}} - 4,42 \cdot 10^{-19} \right)}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,3 \cdot 10^{-4}} \approx 5 \text{ мм};$$

№14

Фотокатод, покрытый кальцием, освещается светом с длиной волны $\lambda = 225$ нм. Работа выхода электронов из кальция $A = 4,42 \cdot 10^{-19}$ Дж. Вылетевшие из катода электроны попадают в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции и движутся по окружности максимального радиуса $R = 5$ мм. Вычислите модуль индукции магнитного поля B ?

Решение

1. Условие нахождения заряженной частицы в магнитном поле на стационарной круговой орбите радиусом r

$$\frac{mv^2}{r} = evB; \Rightarrow B = \frac{mv}{er};$$

2. Скорость фотоэлектронов определится из уравнения внешнего фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{mv^2}{2} + A; \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} - A = \frac{mv^2}{2}; \quad v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{hc}{\lambda} - A \right)};$$

3. Максимальный радиус окружности, по которой фотоэлектроны движутся в магнитном поле:

$$B = \frac{m \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{hc}{\lambda} - A \right)}}{er} \approx \frac{1 \cdot 10^{-30} \sqrt{\frac{2}{10^{-30}} \left(\frac{2 \cdot 10^{-25}}{2,25 \cdot 10^{-7}} - 4,42 \cdot 10^{-19} \right)}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \approx 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Тл};$$

№15

Фотокатод, покрытый кальцием (работа выхода $A = 4,42 \cdot 10^{-19}$ Дж), освещается светом с частотой $\nu = 2 \cdot 10^{15}$ Гц. Вылетевшие из катода электроны попадают в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции и движутся по окружности максимального радиуса $R = 5$ мм. Вычислите модуль индукции магнитного поля B ?

Решение

1. Условие нахождения заряженной частицы в магнитном поле на стационарной круговой орбите радиусом r

$$\frac{mv^2}{r} = evB; \Rightarrow B = \frac{mv}{er};$$

2. Скорость фотоэлектронов определится из уравнения внешнего фотоэффекта:

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} + A; \Rightarrow h\nu - A = \frac{mv^2}{2}; \quad v = \sqrt{\frac{2}{m} (h\nu - A)};$$

3. Максимальный радиус окружности, по которой фотоэлектроны движутся в магнитном поле:

$$B = \frac{m \sqrt{\frac{2}{m} (h\nu - A)}}{er} \approx \frac{1 \cdot 10^{-30} \sqrt{\frac{2}{10^{-30}} (6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 2 \cdot 10^{15} - 4,42 \cdot 10^{-19})}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \approx 1,65 \cdot 10^{-3} \text{ Тл};$$

№16

Какие максимальные скорость и импульс получают электроны, вырванные из натрия излучением с длиной волны 66 нм, если работа выхода составляет $4 \cdot 10^{-19}$ Дж?

Решение

1. Максимальная скорость фотоэлектронов определится из уравнения внешнего фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{mv^2}{2} + A; \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} - A = \frac{mv^2}{2}; \quad v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{hc}{\lambda} - A \right)};$$
$$v \approx \sqrt{\frac{2}{10^{-30}} \left(\frac{2 \cdot 10^{-25}}{6,6 \cdot 10^{-8}} - 4 \cdot 10^{-19} \right)} \approx 2,3 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

2. Импульс фотона:

$$p = mv \approx 10^{-30} \cdot 2,3 \cdot 10^6 \approx 2,3 \cdot 10^{-24} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}};$$

№17

Фотоны, имеющие энергию 5 эВ, выбивают электроны с поверхности металла. Работа выхода электронов из металла равна 4,7 эВ. Какой импульс приобретает электрон при вылете с поверхности металла?

Решение

1. Уравнение внешнего фотоэффекта позволяет определить скорость фотоэлектрона:

$$\varepsilon_f = \frac{mv^2}{2} + A; \Rightarrow \varepsilon_f - A = \frac{mv^2}{2}; \quad v = \sqrt{\frac{2}{m} (\varepsilon_f - A)};$$

2. Импульс фотоэлектронов:

$$p = mv = \sqrt{2m(\varepsilon_f - A)} \approx \sqrt{2 \cdot 10^{-30} (5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} - 4,7 \cdot 10^{-19})} \approx 8 \cdot 10^{-25} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}};$$

№18

Чему равна скорость электронов, выбиваемых из металлической пластины, если при задерживающем напряжении $U = 3$ В фотоэффект прекращается?

Решение

1. Условие прекращения фототока вследствие действия запирающего напряжения

$$\frac{mv^2}{2} = eU; \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \approx \sqrt{\frac{3,2 \cdot 10^{-19} \cdot 3}{10^{-30}}} \approx 6 \cdot 10^5 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

№19

Какова максимальная скорость электронов, выбиваемых из металлической пластины светом с длиной волны $\lambda = 3 \cdot 10^{-7}$ м, если красная граница фотоэффекта 540 нм?

Решение

1. Работа выхода материала пластины:

$$A = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{\lambda_{\text{кр}}};$$

2. Скорость фотоэлектронов:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{mv^2}{2} + \frac{hc}{\lambda_{\text{кр}}}; \quad v = \sqrt{\frac{2hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{\text{кр}}} \right)}{m}} \approx \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-25} \left(\frac{1}{3 \cdot 10^{-7}} - \frac{1}{5,4 \cdot 10^{-7}} \right)}{10^{-30}}} \approx 769 \frac{\text{км}}{\text{с}};$$

№20

При какой температуре газа средняя энергия теплового движения атомов одноатомного газа будет равна энергии электронов, выбиваемых из металлической пластинки с работой выхода $A_{\text{вых}} = 2$ эВ при облучении монохроматическим светом с длиной волны 300 нм?

Решение

1. Энергия теплового движения атомов одноатомного идеального газа:

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} k_B T;$$

2. Энергия фотоэлектронов при внешнем фотоэффекте:

$$\varepsilon_e = \frac{hc}{\lambda} - A; \Rightarrow \frac{3}{2} k_B T = \frac{hc}{\lambda} - A;$$
$$T = \frac{\frac{hc}{\lambda} - A}{1,5 k_B} \approx \frac{\frac{2 \cdot 10^{-25}}{3 \cdot 10^{-7}} - 3,2 \cdot 10^{-19}}{1,5 \cdot 1,4 \cdot 10^{-23}} \approx 16,5 \cdot 10^3 \text{ К};$$

№21

В вакууме находятся два покрытых кальцием электрода, к которым подключен конденсатор емкостью $C = 8000$ пФ. При длительном освещении катода светом фототок, возникший вначале, прекращается, а на конденсаторе появляется заряд $q = 11 \cdot 10^{-9}$ Кл. Работа выхода электронов из кальция $A = 4,42 \cdot 10^{-19}$ Дж. Определите длину волны λ света, освещающего катод.

Решение

1. Фототок протекает до тех пор пока разность потенциалов между обкладками конденсатора не достигает напряжения запирающего:

$$\frac{mv^2}{2} = eU; \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} = eU + A; \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{eU + A};$$

2. Максимальная разность потенциалов между обкладками конденсатора:

$$q = CU; \Rightarrow U = \frac{q}{C};$$

3. Искомая длина волны:

$$\lambda = \frac{hc}{\frac{eq}{C} + A} \approx \frac{2 \cdot 10^{-25}}{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,1 \cdot 10^{-8}}{8 \cdot 10^{-9}} + 4,42 \cdot 10^{-19}} \approx 301 \text{ нм};$$

№22

При облучении катода светом с частотой $\nu = 1,0 \cdot 10^{15}$ Гц фототок прекращается при приложении между анодом и катодом напряжения $U = 1,4$ В. Чему равна частотная красная граница фотоэффекта ν_0 для вещества фотокатода?

Решение

1. Фототок протекает до тех пор, пока разность потенциалов не достигает напряжения запирающего:

$$\frac{mv^2}{2} = eU; \Rightarrow h\nu = eU + A; \Rightarrow A = h\nu - eU;$$

2. Красная граница фотоэффекта:

$$h\nu_0 = A;$$

3. Искомая длина волны:

$$h\nu_0 = h\nu - eU; \Rightarrow \nu_0 = \nu - \frac{eU}{h} \approx 1 \cdot 10^{15} - \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,4}{6,6 \cdot 10^{-34}} \approx 6,66 \cdot 10^{14} \text{ Гц};$$

№23

В вакууме находятся два покрытых кальцием электрода, к которым подключен конденсатор емкостью C . При длительном освещении катода светом с длиной волны $\lambda = 300$ нм фототок, возникший вначале, прекращается, а на конденсаторе появляется заряд $q = 11 \cdot 10^{-9}$ Кл. Работа выхода электронов из кальция $A = 4,42 \cdot 10^{-19}$ Дж. Определите емкость конденсатора C .

Решение

1. Фототок протекает до тех пор пока разность потенциалов между обкладками конденсатора не достигает напряжения запирающего:

$$\frac{mv^2}{2} = eU; \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} = eU + A; \Rightarrow eU = \frac{hc}{\lambda} - A; \quad \frac{eq}{C} = \frac{hc}{\lambda} - A;$$

2. Ёмкость конденсатора:

$$C = \frac{eq}{\frac{hc}{\lambda} - A} \approx \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,1 \cdot 10^{-8}}{\frac{2 \cdot 10^{-25}}{3 \cdot 10^{-7}} - 4,42 \cdot 10^{-19}} \approx 7,4 \cdot 10^{-9} \text{ Ф};$$
